КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
АКАДЕМИКА
Н. Н. ЛУЗИНА

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Проф. И. И. ЖЕГАЛКИН и доц. М. И. СЛУДСКАЯ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

УЧЕБНИК
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

УТВЕРЖДЕНО НАРКОМПРОСОМ РСФСР



МОСКВА • 1936

Ответственный редактор *В. Н. Молодший.*
Технический редактор *И. И. Кутин.*

●

Сдано в набор 2/IX 1935 г. Подписано к печати 25/XII 1935 г. Формат бумаги 62×94¹/₁₆. Тираж 10 000 экз. Печ. листов 27. Бум. листов 13,5. Авт. листов 35,98. Печ. знаков в 1 бум. листе 109 000. У-91. Учпедгиз № 7553. Заказ № 2963.
Цена 5 р. 75 к. Переплет 1 р. 25 к.

●

Уполн. Главлита Б-16106.

●

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига". Москва, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава XIII.

Метод рационализации.

Глава XIV.

Общий обзор теории неопределенных интегралов.

Глава XV.

Основные свойства определенного интеграла.

Глава XVI.

Обобщенные интегралы.

Глава XVII.

Интеграл как функция параметров. Вычисление интегралов.

Глава XVIII.

Порядки бесконечно-малых.

Глава XIX.

Эквивалентные величины.

Глава XX.

Интегральная сумма и второй принцип.

Глава XXI.

Геометрические и механические приложения определенного интеграла.

Глава XXII.

Двойной интеграл.

Глава XXIII.

Вычисление двойного интеграла.

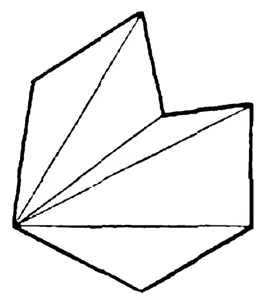
ДВЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

В тесной и неразрывной связи с диференциальным исчислением, являясь его естественным продолжением, стоит так называемое интегральное исчисление.

Подобно тому как на возникновение диференциального исчисления сильное влияние оказали две задачи: задача о касательной и задача о скорости, — точно так же и интегральное исчисление возникло из двух задач.

§ 1. Первая задача интегрального исчисления.

К числу тех задач, которые естественно возникли при самом начале зарождения геометрии как науки, принадлежит прежде всего задача о вычислении площадей. Причина очевидна. Эта задача имеет не только теоретический, но и практический интерес. И не случайно, быть может, начала геометрии были заложены в Египте. Ежегодные бурные разливы Нила, смывая границы земельных участков и изменяя их форму, тем самым ставили на очередь вопрос о вычислении площадей.



Черт. 1.

Метод, который древние геометры употребляли при вычислении площадей, состоял в следующем: они старались построить квадрат, равновеликий площади данной фигуры. Если это им удавалось, то задача считалась решенной. Благодаря же этому их методу и в настоящее время задачу о вычислении площади данной фигуры обыкновенно называют задачей о квадратуре этой площади.

По аналогичной причине объем данного тела называется его кубатурой, потому что древние геометры, чтобы вычислить объем данного тела, старались построить равновеликий ему куб.

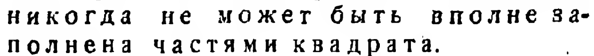
Задача о квадратуре площадей есть первая задача интегрального исчисления.

В наше время уже в элементарной геометрии вычисляются площади простейших фигур, как, например, треугольника и трапеции. Умея же вычислять площадь треугольника, мы можем вычислить и площадь любого многоугольника. Для этого достаточно разбить его на систему треугольников, что можно сделать весьма разнообразными способами, проводя, например, всевозможные диагонали из одной какой-нибудь его вершины (черт. 1).

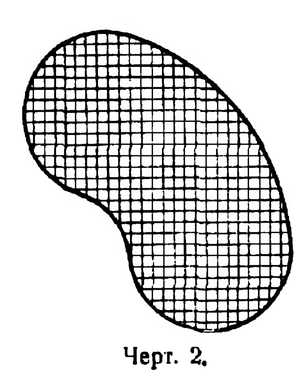
Но если таким образом мы не встречаем никаких особых теоретических затруднений при вычислении площадей, ограниченных отрезками

прямых линий, то совершенно иначе представляется дело, лишь только в число границ данной фигуры входят не только отрезки прямых, но и дуги кривых линий. Уже задача о квадратуре круга решается в элементарной геометрии с большими затруднениями, требуя для своего решения понятия о пределе. Эти затруднения возрастают, если границами фигуры служат более сложные кривые. Легко видеть причину этого.

Если мы хотим измерить площадь, ограниченную кривыми линиями, то мы должны узнать, сколько и каких частей квадрата, принятого за единицу меры, можно уложить в данной площади. Но на какие бы малые квадраты мы ни разделили квадрат, принятый за единицу, и сколько бы и как бы мы ни укладывали эти малые квадраты, мы всегда будем получать фигуру, ограниченную не кривой линией, а ломаной. Следовательно, *площадь, ограниченная кривыми линиями,*



никогда не может быть вполне заполнена частями квадрата.



Черт. 2.

Точно так же ясно, что тело, ограниченное кривыми поверхностями, не может быть заполнено никакими частями куба.

Древние геометры не были в состоянии преодолеть затруднений, вытекающих из этого факта. Хотя они и вычисляли площади и объемы более или менее сложных фигур, но они не имели *общего метода*, который мог бы быть применен для вычисления любой произвольно данной площади. Этот метод был выработан только математикой нового времени, которая в понятии предела приобрела могучее орудие для решения самых трудных задач. Пользуясь этим понятием, а также опираясь на понятия координат и функции, оказалось возможным облечь в аналитическую форму геометрическую задачу о квадратуре площади. Преобразованная таким образом, эта задача привела к понятию *определенного интеграла*. Создался новый отдел математики под названием *теории определенных интегралов*. Задачи о квадратуре и кубатуре являются теперь только частными случаями приложения этой теории. Но тем интереснее отметить тот факт, что, только облекая в аналитическую форму геометрическую задачу о квадратуре, можно легко и естественно притти к понятию об определенном интеграле, потому что с геометрической точки зрения теория определенных интегралов есть не что иное, как замаскированная задача о квадратуре площади. Поставленная еще в глубокой древности, эта задача служит предметом постоянного исследования и новейших математиков, но теперь ее геометрическая сущность часто бывает глубоко скрыта под теми аналитическими формами, в которые ее облекают.

Рассмотрим теперь, в чем заключается вторая задача интегрального исчисления.

§ 2. Вторая задача интегрального исчисления.

Эта задача могла возникнуть только в новое время, так как она тесно связана с понятием производной.

Всякая функция, производная которой равна данной функции, называется первообразной, или интегралом, данной функции.

От последнего термина произошло и название интегрального исчисления.

Так, например, как известно,

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\quad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x.$$

Следовательно, синус есть первообразная косинуса. В свою очередь косинус есть первообразная минус-синуса.

Функция $\arcsin x$ служит интегралом, или первообразной, для $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, потому что

$$\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}:$$

Так как

$$\frac{de^x}{dx}=e^x,$$

то показательная функция e^x является первообразной для самой себя.

Лишь только введено понятие функции, как немедленно же возникают две задачи, обратные друг другу. С одной стороны, возникает задача:

найти производную данной функции,

с другой стороны, задача:

найти интеграл данной функции.

Обе эти задачи могут быть поставлены относительно всякой функции. Так, например, если нам дана функция x^5, то, с одной стороны, мы можем искать ее производную, и это будет задача диференциального исчисления. Как известно,

$$\frac{dx^5}{dx}=5x^4.$$

Но, с другой стороны, мы можем искать функцию, производная которой равнялась бы как раз этой данной функции x^5, т. е. можем искать такую функцию u, которая удовлетворяла бы уравнению:

$$\frac{du}{dx}=x^5.$$

В данном случае нетрудно сообразить, что этому уравнению удовлетворяет функция $\frac{x^6}{6}$. Действительно,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6}\right)=x^5.$$

Следовательно, функция $\frac{x^6}{6}$ есть интеграл функции x^5.

Задача о вычислении интегралов, данной функции и есть вторая задача интегрального исчисления.

Таким образом, мы видим, что задача найти производную данной функции есть задача диференциального исчисления; задача

же найти интеграл данной функции уже является задачей интегрального исчисления.

Всякий процесс перехода от данной функции к ее производной называется диференцированием. Точно так же всякий переход от данной функции к ее интегралу называется *интегрированием*.

Легко видеть, что действие интегрирования обратно действию диференцирования. Действительно, предположим, что имеем две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, относительно которых известно, что

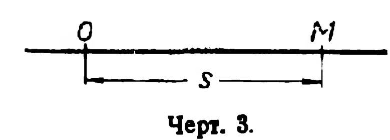
$$\varphi'(x) = \psi(x).$$

Возможны два случая. Нам может быть дана функция $\varphi(x)$, причем требуется вычислить функцию $\psi(x)$. Это — задача диференциального исчисления.

Или нам может быть дана функция $\psi(x)$, требуется же вычислить функцию $\varphi(x)$. Это уже задача интегрального исчисления.

Ясно, что задача интегрального исчисления обратна задаче диференциального исчисления.

Понятия действий диференцирования и интегрирования показывают, что Анализ, подобно элементарной алгебре, изучает различные действия, но, в отличие от алгебры, он изучает действия не над числами, а над функциями.



Черт. 3.

К вычислению интегралов приводит бесчисленное множество задач. Рассмотрим одну из них.

Пусть по прямой, которую примем за ось X, движется точка M. Если через s обозначим так называемый путь точки M, т. е., точнее, ее абсциссу, то s будет некоторой функцией времени t. Пусть

$$s = f(t).$$

Как известно, скорость точки, которую обозначим через v, равна производной от s по t:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Следовательно, если известна зависимость s от t, то вычисление скорости точки приводится к вычислению производной, т. е. к задаче диференциального исчисления. Но предположим, что зависимость пути s от времени нам неизвестна и что как раз требуется найти ее, зная скорость точки в каждый момент, а именно пусть

$$v = \varphi(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — данная известная функция. Переписав это равенство в такой форме:

$$\frac{ds}{dt} = \varphi(t),$$

мы видим, что s есть интеграл функции $\varphi(t)$, а потому задача о вычислении пути, проходимого точкой, из скорости точки есть задача интегрального исчисления.

В общем случае к вычислению соответствующих интегралов приводится всякая задача, в которой требуется найти закон изменения самой величины, зная закон, по которому меняется ее скорость.

§ 3. Две задачи интегрального исчисления.

Итак, мы имеем две задачи, приведшие к возникновению интегрального исчисления: задачу о вычислении площадей и задачу о вычислении первообразных.

Как мы видим, эти две задачи по своему содержанию глубоко различны. Поэтому вполне естественно, что они повели к двум ветвям интегрального исчисления: из первой развилась та ветвь, которая носит название „теории определенных интегралов"; вторая задача дала ветвь, известную как теория неопределенных интегралов. Но хотя корни этих ветвей глубоко различны, однако местами они настолько тесно переплетаются между собой, что составляют почти одно неразличимое целое.

Мы начнем с изучения первой задачи. Увидим, что решение ее тесно связано с решением второй задачи, к изучению которой после этого мы естественно и перейдем.

§ 4. Заключение.

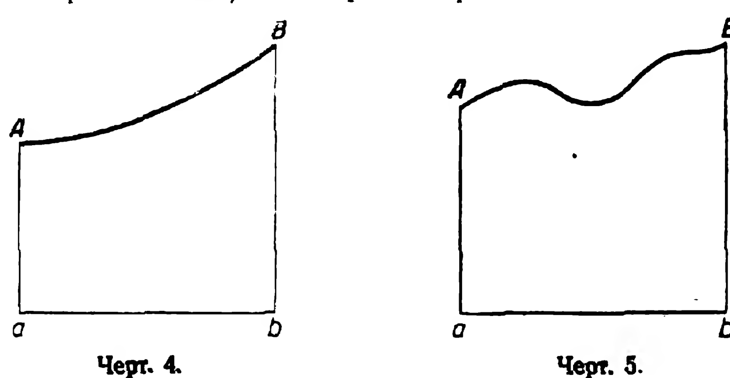
Интегральное исчисление возникло из двух задач: задачи о квадратуре площадей и задачи о вычислении первообразных.

ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ: КВАДРАТУРА ПЛОЩАДЕЙ.

Общий метод для вычисления площадей, как было указано, мог быть выработан только на основе идей математики нового времени. Изложению его и посвящена эта глава.

§ 5. Кривая трапеция.

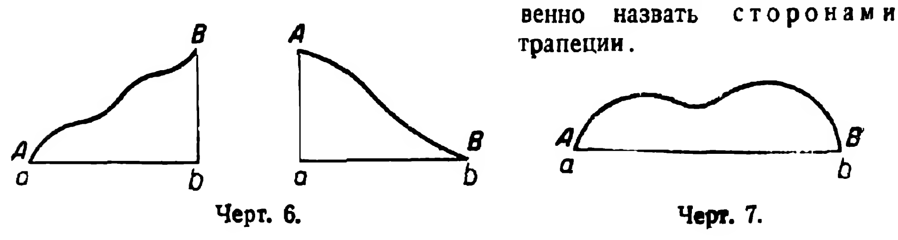
Ввиду некоторого сходства с обыкновенной трапецией, мы будем называть криволинейной, или кривой трапецией или даже просто



Черт. 4. Черт. 5.

трапецией всякую фигуру, ограниченную с трех сторон прямыми перпендикулярными к одной из них, а с четвертой стороны — данной кривой (черт. 4).

Отрезок ab назовем **нижним основанием** трапеции, кривую же AB—ее **верхним основанием**; перпендикуляры aA и bB естественно назвать **сторонами** трапеции.

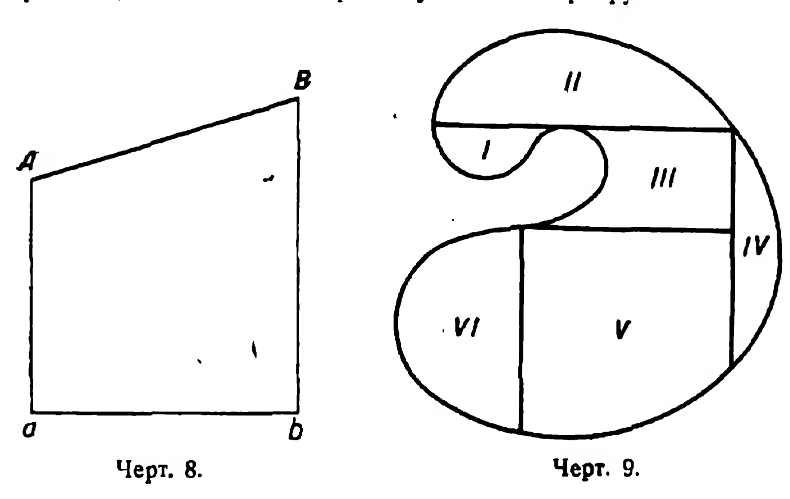


Черт. 6. Черт. 7.

Если вместо монотонной кривой мы будем иметь волнообразную (черт. 5), то получим фигуру, которая очень мало напоминает трапецию. Несмотря на это, мы и эту фигуру будем называть кривой, или криволинейной, трапецией. Вообще

кривой трапецией называют всякую фигуру, ограниченную с трех сторон прямыми, перпендикулярными к одной из них, и с четвертой стороны некоторой кривой.

В частном случае точка A может совпадать с точкой a, или точка B с точкой b (черт. 6). Получаемые при этом фигуры называют кривыми треугольниками. Но мы их будем также называть и кривыми трапециями, рассматривая их как предельный случай, когда у трапеции одна сторона исчезла. Также и фигуру на чертеже 7 мы будем рассматривать как частный случай кривой трапеции, у которой обе стороны исчезли. Следовательно, с этой точки зрения половина круга есть кривая трапеция, основанием которой служит диаметр круга.



Черт. 8.　　Черт. 9.

В частном случае, когда кривая AB обращается в прямую (черт. 8), мы имеем обыкновенную трапецию. Элементарная геометрия отрезки aA и bB называет не сторонами, а основаниями. Следовательно, наша терминология не совпадает с терминологией элементарной геометрии.

Понятие о кривой трапеции имеет большое значение, потому что всякую данную плоскую фигуру всегда можно разделить на несколько кривых трапеций, сумма площадей которых дает нам площадь данной фигуры. Так, например, фигура на чертеже 9 разделена на шесть трапеций. Поэтому с теоретической точки зрения, чтобы уметь вычислить площадь любого типа, достаточно найти общий метод, пригодный для вычисления площади любой кривой трапеции.

§ 6. Обозначения.

Условимся в употреблении некоторых обозначений, пользоваться которыми нам придется очень долгое время.

Под a и b будем разуметь два произвольно взятых неравных числа. Возможны два случая: или $a < b$, или $a > b$. В том и другом случае между ними мы можем вставить ряд тоже произвольно выбранных промежуточных чисел:

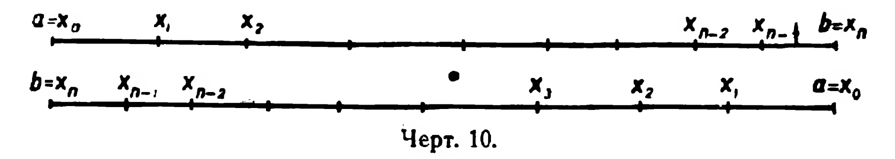
$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \tag{1}$$

идущих от a к b. Эти числа будем называть числами x_k и для симметрии примем, что

$$a = x_0, \quad b = x_n.$$

Каждое из чисел x_k, равно как и число их $n-1$, берется совершенно произвольно, с единственным ограничением: ряд (1) должен давать ряд возрастающих чисел, если $a < b$, и ряд убывающих, если $a > b$. Следовательно, это есть так называемый монотонный ряд чисел.

Если мы изобразим числа точками на оси абсцисс, то, смотря по тому, какое из чисел a и b больше, мы получим один из следующих геометрических образов:



Черт. 10.

Если $a < b$, то точки x_k идут слева направо. Они идут справа налево, если $a > b$.

Когда выбраны эти промежуточные числа x_k, то основной интервал (a, b) разобьется ими на несколько меньших подъинтервалов:

$$(a, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, b),$$

которые будем называть ***элементарными интервалами.*** В каждом из них выберем, тоже совершенно произвольно, какое-нибудь число. То число, которое выбрано в промежутке (x_k, x_{k+1}), обозначим символом ξ_k. Получим систему чисел

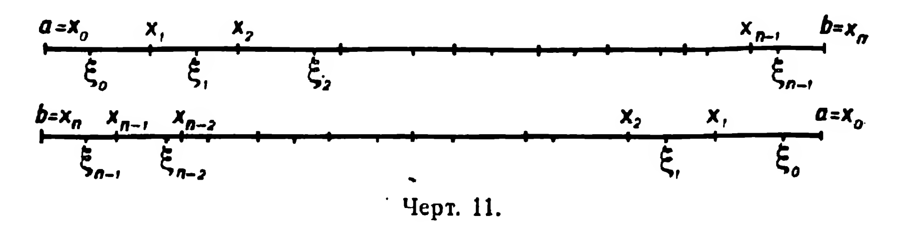
$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}.$$

Каждое число ξ_k необходимо должно быть промежуточным между x_k и x_{k+1}, но не исключается возможность, что оно совпадает с тем или с другим из них.

Взаимное соотношение между числами x_k и ξ_k можно схематически представить так:

$$a \underset{\xi_0}{} x_1 \underset{\xi_1}{} x_2 \ldots x_k \underset{\xi_k}{} x_{k+1} \ldots x_{n-1} \underset{\xi_{n-1}}{} b,$$

или такими геометрическими образами:



Черт. 11.

Ввиду этого мы будем называть числа x_k точками деления и будем говорить, что точки x_k делят основной интервал (a, b) на подъинтервалы (x_k, x_{k+1}). Выражаясь геометрическим языком, мы можем сказать, что выбор чисел x_k и ξ_k совершается следующим образом: основной

интервал (a, b) делится произвольными точками деления x_k на некоторое число подъинтервалов, на каждом из которых затем отмечается, тоже совершенно произвольно, какая-нибудь точка ξ_k.

Вообразим теперь, что переменная величина x переходит от значения a к значению b, принимая последовательно значения, равные выбранным промежуточным числам $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Когда x переходит от значения x_k к значению x_{k+1}, то он получает приращение, равное разности $x_{k+1} - x_k$. Эту разность мы будем обозначать символом

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

Таким образом, выбрав ряд промежуточных чисел x_k, мы тем самым получаем ряд разностей:

$$x_1 - a, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \ldots, \quad x_{n-1} - x_{n-2}, \quad b - x_{n-1},$$

короче обозначаемых так:

$$\Delta x_0, \quad \Delta x_1, \quad \Delta x_2, \ldots, \quad \Delta x_{n-2}, \quad \Delta x_{n-1}.$$

Эти разности будут положительны, если $a < b$, и отрицательны, если $a > b$. Следовательно, *все эти разности всегда имеют один и тот же знак*, причем абсолютная величина каждой разности Δx_k, очевидно, равна длине подъинтервала (x_k, x_{k+1}). Если же мы условимся считать длину этого подъинтервала положительной или отрицательной, смотря по тому, лежит ли точка x_{k+1} правее или левее точки x_k, то длина интервала (x_k, x_{k+1}) будет равна как раз Δx_k.

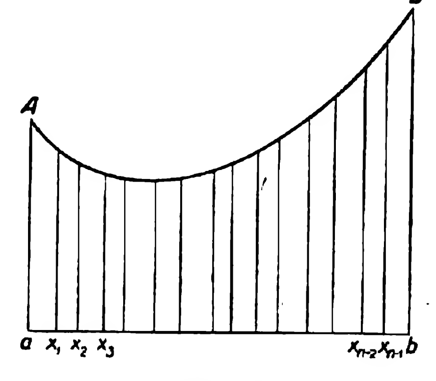
Абсолютную длину наибольшего подъинтервала обозначим через λ.

§ 7. Элементарные прямоугольники.

Пусть имеем какую-нибудь кривую трапецию $aABb$ (черт. 12). Интервал (a, b), служащий ее основанием, назовем основным интервалом. Разделив его на произвольное число n частей с помощью произвольно взятых точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, получим подъинтервалы:

$$(a, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad (x_2, x_3), \ldots, \quad (x_{n-1}, b). \qquad (1)$$

В частном случае мы можем взять точки деления на равных расстояниях друг от друга. Тогда все подъинтервалы (1) будут равны. Но в общем случае эти подъинтервалы могут быть и не равны между собой.



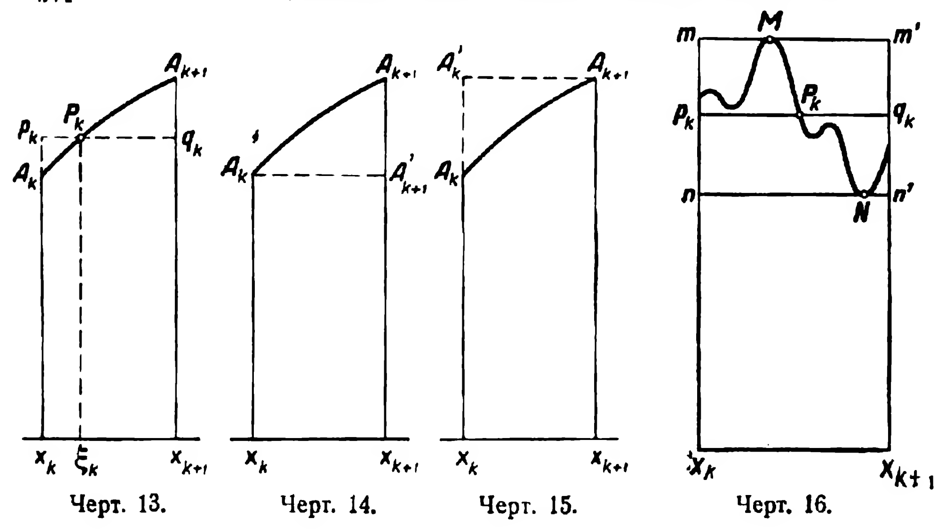
Черт. 12.

Восставив во всех точках деления ординаты, мы разделим ими площадь трапеции на части, которые назовем *элементарными полосками*. Очевидно, что каждая элементарная полоска в свою очередь есть кривая трапеция, и площадь данной трапеции равна сумме площадей всех элементарных полосок.

Выбрав точки деления и разделив ими основной интервал на подъинтервалы, мы в каждом подъинтервале отметим, тоже совершенно произвольно, какую-нибудь точку. Точку, выбранную в подъинтервале (x_k, x_{k+1}), обозначим символом ξ_k.

Рассмотрим элементарную полоску, стоящую на интервале (x_k, x_{k+1}) (черт. 13), и пусть P_k — та точка на кривой, абсцисса которой равна ξ_k. Проведем через P_k прямую, параллельную основанию, до пересечения ее в точках p_k и q_k с крайними ординатами полоски. Получим прямоугольник $x_k p_k q_k x_{k+1}$, который будем называть *элементарным прямоугольником общего типа*. Высота его, очевидно, зависит от выбора точки ξ_k, и, меняя положение этой точки, мы будем получать различные элементарные прямоугольники. Из них необходимо отметить два частных случая.

Если мы заставим точку ξ_k совпасть с точкой x_k (черт. 14), то получим прямоугольник $x_k A_k A'_{k+1} x_{k+1}$, который назовем *внутренним элементарным прямоугольником*. Если же точку ξ_k поместим в точке x_{k+1}, то получим *выступающий элементарный прямоугольник* (черт. 15).

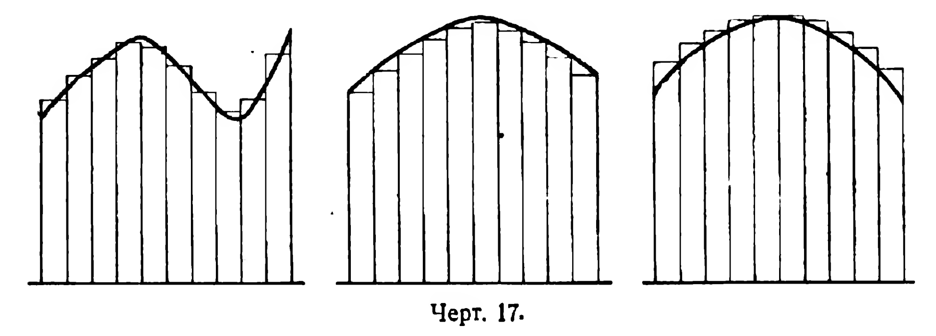


Черт. 13. Черт. 14. Черт. 15. Черт. 16.

При этих определениях неявно предполагалось, что часть кривой, ограничивающая полоску, монотонна. Если же она волнообразна (черт. 16), то элементарным *прямоугольником* общего типа попрежнему назовем прямоугольник $x_k p_k q_k x_{k+1}$, высотой которого служит ордината произвольно взятой точки P_k, но внутренним прямоугольником уже будем называть тот прямоугольник $x_k n n' x_{k+1}$, высотой которого служит ордината наинизшей точки N; напротив, прямоугольник $x_k m m' x_{k+1}$, высотой которого служит ордината точки M, наиболее далекой от основания, даст нам выступающий прямоугольник. Следовательно,

внутренним и выступающим прямоугольниками называются прямоугольники, высотами которых служат соответственно наименьшая и наибольшая из ординат той части кривой, которая ограничивает полоску. Прямоугольник, высотой которого служит ордината произвольно взятой точки на дуге кривой, есть элементарный прямоугольник общего типа.

Построим для каждой элементарной полоски соответствующие элементарные прямоугольники. Смотря по тому, будут ли эти прямоугольники все общего типа, или же все внутренние, или все выступающие, мы получим один из следующих геометрических образов:



Черт. 17.

Непосредственно очевидно, что

площадь данной трапеции меньше суммы площадей всех выступающих прямоугольников и больше суммы площадей всех внутренних прямоугольников.

Этот простой геометрический факт нам послужит исходным пунктом для установления метода, пригодного для вычисления площади любой трапеции.

§ 8. Площадь трапеции.

Примем основание трапеции за ось X и предположим, что кривая, ограничивающая трапецию, монотонно подымается слева направо.

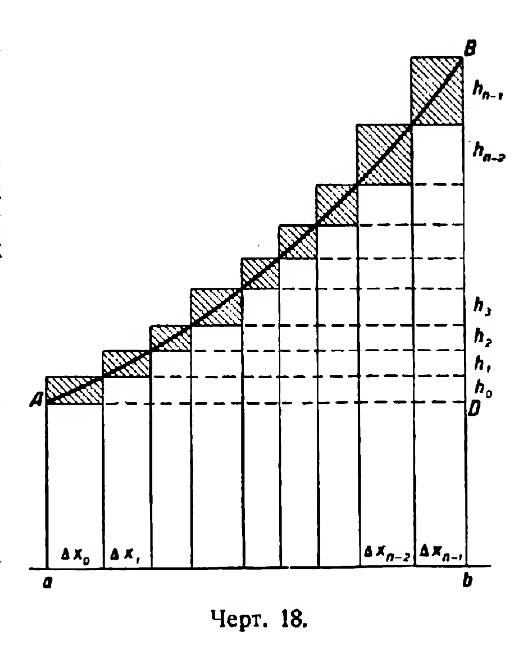
Разделим трапецию на элементарные полосы и для каждой полосы построим как внутренний, так и выступающий прямоугольники (черт. 18). Обозначим через u площадь трапеции, через p — сумму площадей всех внутренних, а через q — сумму площадей всех выступающих прямоугольников.

Ясно, что

$$p < u < q. \qquad (1)$$

Спрашивается: какую мы сделаем ошибку, если примем площадь u равной p или q?

Всякой элементарной полоске соответствуют два прямоугольника: внутренний и выступающий. Разность между ними есть тоже прямоугольник. Мы назовем его граничным*).



Черт. 18.

*) На чертеже 18 все граничные прямоугольники заштрихованы.

Очевидно, что сумма всех граничных прямоугольников равна $q-p$. Вычислим ее хотя бы только приблизительно.

Обозначим высоты граничных прямоугольников в порядке их слева направо через h_0, h_1, h_2, ..., h_{n-1}. Так как основания их соответственно равны Δx_0, Δx_1, Δx_2, ..., Δx_{n-1}, то

$$q-p=h_0\Delta x_0+h_1\Delta x_1+h_2\Delta x_2+\ldots+h_{n-1}\Delta x_{n-1}. \qquad (2)$$

Пусть λ — наибольший из тех элементарных подъинтервалов, на которые разделено основание трапеции. Следовательно,

$$\Delta x_0 \leqq \lambda,\ \Delta x_1 \leqq \lambda,\ \Delta x_2 \leqq \lambda, \ldots,\ \Delta x_{n-1} \leqq \lambda.$$

Заменяя во (2) все Δx_0, $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}$ через λ, мы увеличим правую часть равенства и получим неравенство:

$$q-p \leqq \lambda(h_0+h_1+h_2+\ldots+h_{n-1}). \qquad (3)$$

Продолжим*) основания граничных прямоугольников вправо до пересечения их с крайней ординатой bB. Получим систему параллельных линий, которые разделят ординату bB на отрезки, соответственно равные высотам граничных прямоугольников. Этим построением мы как бы переносим высоты h_0, $h_1, \ldots, h_{n-1}$ на ординату bB. Геометрически ясно, что

$$h_0+h_1+h_2+\ldots+h_{n-1}=DB=bB-aA.$$

Обозначая через c разность между крайними ординатами трапеции: $c=bB-aA$, мы из (3) получаем основное для нас соотношение:

$$q-p \leqq \lambda c. \qquad (4)$$

Это соотношение замечательно следующим: очевидно, что суммы p и q, т. е. суммы внутренних и выступающих прямоугольников, зависят от того, как выбраны *все* точки деления x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$. Если мы изменим хоть одну из них, то каждая из этих сумм, вообще говоря, изменится.

Следовательно, левая часть неравенства (4) зависит от выбора всех точек деления.

Но правая часть не зависит от выбора всех точек деления. Она зависит только от величины λ наибольшего из тех элементарных подъинтервалов, на которые разделено основание трапеции. Поэтому если мы будем менять точки деления так, чтобы наибольший подъинтервал сохранял одно и то же значение, то левая часть неравенства будет меняться, правая же нет.

Вообразим теперь следующий процесс. Разделив как-нибудь основание трапеции на элементарные интервалы и построив для этого деления внутренние и выступающие элементарные прямоугольники, вычислим значения сумм p и q. Пусть окажется, что

$$p=p_1,\ q=q_1.$$

После этого, уничтожив все точки деления, мы снова делим основание трапеции на какие-нибудь элементарные интервалы и вычисляем

---

*) На чертеже пунктирными линиями.

значения сумм p и q для этого нового деления. Пусть окажется, что при втором делении

$$p = p_2, \quad q = q_2.$$

После этого, уничтожив все прежние точки деления, мы в третий раз делим основание трапеции и вычисляем для этого деления значения сумм p и q, и т. д., и т. д. Следовательно,

мы мыслим неограниченно продолжающийся процесс последовательного перехода от одного деления трапеции к следующему делению.

Мы предположим, что этот процесс происходит так, что длина λ наибольшего элементарного интервала бесконечно умаляется*) и, следовательно, в пределе обращается в нуль.

Очевидно, что такие процессы возможны. Один из простейших следующий: мы делим в первый раз основание трапеции пополам, затем каждую половину опять пополам и т. д., всякий раз при переходе к новому делению деля пополам все интервалы предыдущего деления. Ясно, что при таком процессе $\lim \lambda = 0$.

Итак, пусть процесс перехода от одного деления к следующему совершается так, что λ бесконечно умаляется.

Но при всяком делении, как мы только что доказали,

$$q - p \leqq \lambda c.$$

Поэтому, если согласно предположению $\lim \lambda = 0$, то

$$\lim (q - p) = 0, \tag{5}$$

и получается

Теорема. **Предел суммы граничных прямоугольников равен нулю.**

Но если u — площадь трапеции, то геометрически ясно, что

$$u - p < q - p, \quad q - u < q - p,$$

а потому согласно (5)

$$\lim (u - p) = 0, \ \lim (q - u) = 0,$$

т. е.

$$u = \lim p = \lim q,$$

и мы получаем теорему:

Площадь кривой трапеции равна пределу суммы или только внутренних или только выступающих элементарных прямоугольников.

Легко теперь получить более общий результат. Разделив трапецию на элементарные полосы, построим элементарные прямоугольники общего типа, сумму площадей которых обозначим через s. Очевидно, что

$$p < s < q.$$

---

*) Бесконечно умаляющейся величиной мы называем всякую переменную величину, предел которой равен нулю. Следовательно, модуль этой величины (не она сама) в процессе изменения становится и остается, начиная с некоторого момента, менее всякой наперед заданной как угодно малой положительной величины.

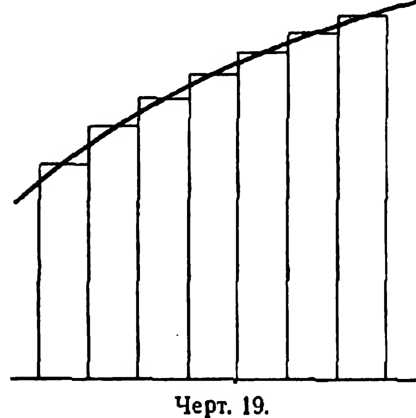
Переходя к пределу, получаем

$$\lim p \leqq \lim s \leqq \lim q,$$

и так как крайние члены равны u, то

$$u = \lim s.$$

Следовательно, площадь трапеции равна пределу суммы площадей элементарных прямоугольников любого типа.



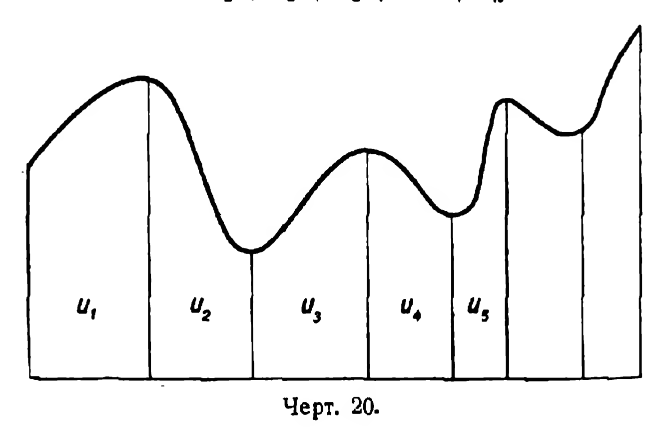
Черт. 19.

Пока мы предполагали, что ординаты кривой идут слева направо, возрастая. Но теорема, очевидно, справедлива и тогда, когда ордината кривой является убывающей функцией абсциссы. Действительно, достаточно изменить направление оси X на противоположное, чтобы ордината как функция абсциссы обратилась из убывающей в возрастающую.

Следовательно, теорема справедлива для всякой трапеции, ограниченной сверху любой монотонной кривой.

Если же трапеция ограничена волнообразной кривой, то, построив элементарные прямоугольники, сумма площадей которых попрежнему пусть будет s, мы разделим трапецию на несколько частей, каждая из которых будет ограничена уже монотонной кривой. Пусть $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ — площади этих частей. Если u — площадь всей трапеции, то

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n. \quad (6)$$



Черт. 20.

Обозначим через $s_1, s_2, \ldots, s_n$ суммы площадей тех элементарных прямоугольников, которые принадлежат соответственно трапециям $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

По доказанному

$$\lim s_1 = u_1, \ \lim s_2 = u_2, \ \lim s_3 = u_3, \ldots, \ \lim s_n = u_n.$$

Но

$$s = s_1 + s_2 + \ldots + s_n,$$

а потому

$$\lim s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

т. е.

$$u = \lim s.$$

Следовательно,

если мы будем мыслить бесконечный процесс последовательного **перехода от одного деления трапеции на элементарные прямоугольники к следующему делению по такому закону, что длина наибольшего из подъинтервалов, на которые делится основание трапеции, бесконечно умаляется, то предел суммы площадей элементарных прямоугольников равен площади трапеции.**

Короче же эту теорему мы формулируем так:

Площадь трапеции равна пределу суммы площадей элементарных прямоугольников.

Эта теорема для нас основная. При ее приложениях чрезвычайно важно то, что способы деления трапеции могут быть весьма разнообразны. Часто удается подобрать такой способ деления, при котором сумма s и ее предел, а следовательно, и площадь трапеции легко вычисляются.

§ 9. О переходе к пределу.

Мы доказали: площадь трапеции равна *пределу* суммы площадей *элементарных прямоугольников.*

При этом мы должны мыслить, что процесс, который нас приводит к пределу суммы s, проходит так, что величина λ наибольшего подъинтервала бесконечно умаляется.

Такие процессы могут быть весьма разнообразны. Простейший, как было указано, заключается в том, что от всякого деления мы переходим к следующему, деля интервалы предыдущего деления пополам. Но мы можем переходить от одного деления к следующему, деля подъинтервалы предыдущего деления не пополам, а на какое угодно число частей, как равных, так и неравных. Наконец, мы можем переходить от старого деления к новому, не удерживая ни одной точки старого деления. Так, например, мы можем в первый раз разделить основание трапеции пополам, затем при втором делении мы разделим основание на три равные части, при третьем — на четыре равные части и т. д. Следовательно, мы каждый раз делим основание трапеции на равные части, но так, что при переходе от одного деления к следующему число частей возрастает на единицу. В таком случае при каждом делении все точки деления будут не те, которые служили точками деления при предыдущем делении, и в то же время ясно, что при таком переходе от одного деления к другому величина λ наибольшего промежутка имеет пределом нуль.

Очевидно, что можно придумать и иные законы такого последовательного перехода от одного деления к следующему, чтобы λ бесконечно умалялась. Исчерпать все подобные законы не в силах никакое воображение.

Предположив, что мы выбрали какой-либо закон такого перехода от одного деления к следующему так, что λ бесконечно умаляется, *обратим внимание на следующее обстоятельство: когда мы делим основание трапеции на подъинтервалы, то чем меньше длина λ наибольшего подъинтервала, тем, вообще говоря, больше число самих подъинтервалов,*

а следовательно, тем больше и число точек деления. Поэтому если при переходе от одного деления к следующему величина λ бесконечно умаляется, то, очевидно, число точек деления бесконечно возрастает. И вот *на первый взгляд кажется*, что требование бесконечного умаления величины λ можно заменить требованием бесконечного возрастания числа точек деления. Но легко видеть, что такая замена невозможна. В самом деле, разделив, например, основной интервал на три части точками g и h, мы могли бы затем переходить от каждого деления к следующему, деля пополам, *за исключением интервала* (g, h), каждый интервал предыдущего деления.

Черт. 21.

При этом, очевидно, число точек деления будет бесконечно возрастать, но для всякого деления интервал (g, h) будет наибольшим, а следовательно, величина λ, равная его длине, не будет бесконечно умаляться. Ввиду этого нашу теорему можно формулировать так:

Площадь криволинейной трапеции равна пределу суммы площадей элементарных прямоугольников в предположении, что число точек деления бесконечно возрастает так, что длина наибольшего промежутка между ними бесконечно умаляется.

Но в таком случае площади элементарных прямоугольников будут тоже бесконечно умаляться, а потому мы можем нашу теорему короче формулировать и так:

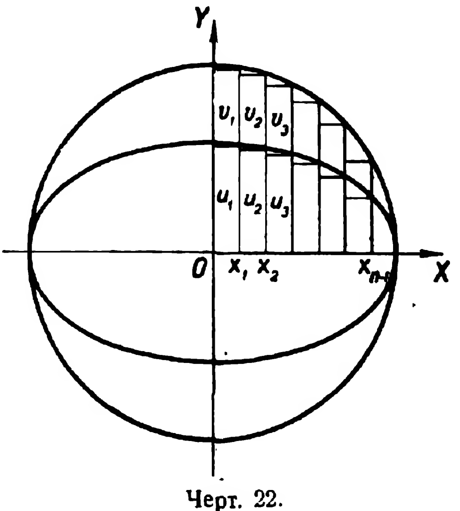
Площадь трапеции равна пределу суммы площадей бесконечно умаляющихся элементарных прямоугольников в бесконечно возрастающем числе.

Рассмотрим пример на применение этой теоремы.

§ 10. Площадь эллипса.

Вычислим площадь эллипса, данного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$



Черт. 22.

Одновременно с ним рассматриваем круг, построенный на большой оси как на диаметре. Уравнение этого круга, если через z обозначим его ординату, будет

$$x^2+z^2=a^2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{y}{z}=\frac{b}{a}, \qquad (3)$$

т. е. *ордината эллипса относится к соответствующей ординате круга как малая ось к большой.*

Делим точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ большую полуось эллипса на подъинтервалы и строим внутренние элементарные прямоугольники как для эллипса, так и для круга. Пусть

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}$$

— площади элементарных прямоугольников, принадлежащих эллипсу, и s — их сумма. Через σ обозначим сумму площадей элементарных прямоугольников, принадлежащих кругу, и пусть

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$$

— их площади.

Площади двух прямоугольников с равными основаниями относятся как их высоты, а потому

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{b}{a}, \quad \frac{u_2}{v_2}=\frac{b}{a}, \quad \frac{u_3}{v_3}=\frac{b}{a}, \ldots,$$

откуда

$$u_1=\frac{b}{a}v_1, \quad u_2=\frac{b}{a}v_2, \ldots, \quad u_{n-1}=\frac{b}{a}v_{n-1}.$$

Складывая эти равенства, получим:

$$s=\frac{b}{a}\sigma.$$

Переходя к пределу, имеем:

$$\lim s=\frac{b}{a}\lim\sigma.$$

Следовательно, если $Э$ — площадь эллипса, то

$$\frac{1}{4}Э=\frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{4},$$

откуда заключаем, что $Э=\pi ab$.

При $a=b$ получим формулу площади круга.

§ 11. Замечание о пользовании книгой.

Книга напечатана двумя шрифтами, обыкновенным и жирным. Напечатанное жирным шрифтом в своей совокупности составляет своего рода конспект к книге. Читателю рекомендуется, изучив каждый параграф, обращать особое внимание на то, что напечатано в нем жирным шрифтом. Изучив всю главу, обязательно перечитать все, напечатанное в ней жирным шрифтом.

Из стремления, чтобы при изложении по возможности ничего не осталось невыясненным, само изложение местами получилось несколько длинным. Поэтому каждая глава снабжена заключением, в котором помещено то, что прочно и твердо должно быть усвоено и удержано в памяти. Нельзя переходить к следующей главе, не овладев вполне содержанием заключения к предыдущей главе.

Примером того, насколько заключение даже к длинной главе может быть кратко, служит как раз заключение к данной главе.

§ 12. Заключение.

Площадь трапеции равна пределу сумм площадей ее элементарных прямоугольников.

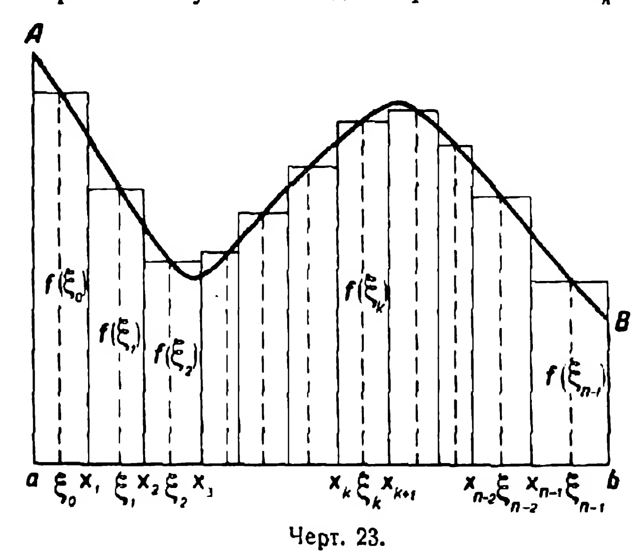
ИНТЕГРАЛ КАК ПРЕДЕЛ СУММЫ.

Мы доказали, что площадь кривой трапеции равна пределу суммы площадей бесконечно умаляющихся элементарных прямоугольников. Если мы этот геометрический факт переведем на аналитический язык, то естественно придем к основному понятию интегрального исчисления, к понятию интеграла как предела суммы.

§ 13. Аналитическое выражение суммы площадей элементарных прямоугольников.

Пусть попрежнему *aABb* — трапеция, ограниченная сверху кривой $y=f(x)$ (черт. 23).

Разделив основание трапеции на подъинтервалы точками x_k и выбрав в полученных подъинтервалах точки ξ_k, строим элементарные прямоугольники, высотами которых служат ординаты точек ξ_k.



Черт. 23.

Первый элементарный прямоугольник имеет основанием отрезок, длина которого равна $x_1 - a$; высота же его равна значению функции $f(x)$ при $x=\xi_0$, а потому площадь его равна

$$f(\xi_0)(x_1 - a).$$

Основание второго элементарного треугольника равно $x_2 - x_1$, высота же его равна $f(\xi_1)$, а потому площадь его равна

$$f(\xi_1)(x_2 - x_1)$$

и т. д. Вообще очевидно, что высота какого-нибудь прямоугольника, основанием которого служит интервал (x_k, x_{k+1}), равна $f(\xi_k)$, а потому площадь его равна

$$f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Последний прямоугольник имеет основанием интервал (x_{n-1}, b); его площадь равна

$$f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1}).$$

Поэтому если S — сумма площадей всех элементарных прямоугольников, то

$$S=f(\xi_0)(x_1-a)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+f(\xi_2)(x_3-x_2)+\ldots$$
$$\ldots+f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)+\ldots+f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1}). \quad (1)$$

Эту сумму назовем *интегральной суммой*. Несколько короче ее можно представить в такой форме:

$$S=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Но обыкновенно мы ее будем обозначать так:

$$S=\sum_a^b f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k),$$

или так

$$S=\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Такое обозначение при своей краткости чрезвычайно удобно. Символ Σ, который есть не что иное, как прописная греческая буква „сигма“, *вообще употребляется в математике как символ суммы. Вслед за ним* стоит выражение

$$f(\xi_k)\Delta x_k, \quad (2)$$

которое своим видом должно напоминать, каковы слагаемые рассматриваемой суммы. Эти слагаемые следующие:

$$f(\xi_0)\Delta x_0, \quad f(\xi_1)\Delta x_1, \quad f(\xi_2)\Delta x_2, \quad \ldots, \quad f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Мы их получим, давая в выражении (2) индексу k все значения от 0 до $n-1$. Наконец, внизу и вверху символа суммы стоят те данные *величины a и b, между которыми вставляются* промежуточные *числа* x_k и которые мы будем называть пределами суммы; из них a — нижний предел, b — верхний.

Определение. **Интегральной суммой от функции $f(x)$, взятой от нижнего предела a до верхнего предела b, называется сумма**

$$S=\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k, \quad (3)$$

составленная следующим образом: данный интервал (a, b) делится на *подъинтервалы произвольно выбранными точками* деления, затем длина каждого подъинтервала Δx_k умножается на значение $f(\xi_k)$ данной функции в какой-нибудь тоже произвольно взятой точке ξ_k этого подъинтервала и берется сумма всех полученных таким образом произведений.

Это определение применимо не только к непрерывным функциям, но также и к прерывным.

Общий тип слагаемых интегральной суммы, как мы видели, следующий:

$$f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

т. е. каждое слагаемое равно произведению некоторого значения функции на некоторое приращение аргумента. Следовательно, чтобы получить какое-нибудь слагаемое, надо в выражении

$$f(x)\,\Delta x$$

дать x и Δx некоторые определенные значения. Поэтому мы можем сказать, что сумма S есть сумма слагаемых типа $f(x)\,\Delta x$ и, следовательно, можем заменить равенство (3) таким:

$$S=\sum_a^b f(x)\,\Delta x, \tag{4}$$

что надо читать так: *S есть сумма слагаемых типа* $f(x)\,\Delta x$.

Так как S есть сумма площадей всех элементарных прямоугольников, то, следовательно:

Сумма площадей всех элементарных прямоугольников равна некоторой интегральной сумме. Поэтому площадь u трапеции равна пределу соответствующей интегральной суммы:

$$u=\lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x. \tag{5}$$

Мы видим, что геометрическая задача о вычислении площадей преобразуется в следующую аналитическую: мы должны найти методы, которые давали бы возможность вычислять пределы интегральных сумм. Но обратим теперь внимание на то, что понятие интегральной суммы шире, чем понятие суммы элементарных прямоугольников. Действительно, интегральная сумма

$$S=f(\xi_0)(x_1-a)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1}) \tag{6}$$

может быть построена с помощью всякой произвольно взятой функции $f(x)$, непрерывной в интервале (a, b). Между прочим, эта функция может быть функцией, принимающей как положительные, так и отрицательные значения. Но когда мы говорим о сумме элементарных прямоугольников трапеции, ограниченной сверху кривой $y=f(x)$, то мы тем самым предполагаем, что функция $f(x)$ может принимать только положительные значения. Следовательно, утверждение, что интегральная сумма равна сумме площадей элементарных прямоугольников, справедливо только тогда, когда функция $f(x)$ положительна. Поэтому возникает вопрос: каково же значение интегральной суммы и ее предела в том случае, когда функция может принимать не только положительные, но и отрицательные значения? Мы должны рассмотреть также и тот случай, когда a не меньше b, как мы до сих пор предполагали, а больше*).

---

*) Все дальнейшее изложение основано на изучении интегральной суммы. Читателю рекомендуется написать ее несколько раз и достигнуть того, чтобы под сокращенным обозначением (4) ясно видеть всю длинную строчку (1).

§ 14. Геометрическое значение интегральной суммы и ее предела.

Пусть $f(x)$ — произвольно взятая непрерывная функция, могущая принимать в интервале (a, b) как положительные, так и отрицательные значения, и пусть попрежнему

$$S = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}, \qquad (1)$$

или короче

$$S = \sum_a^b f(x)\Delta x. \qquad (2)$$

Предполагая сначала, что $a < b$, строим кривую и соответствующие элементарные прямоугольники (черт. 24). Одни из них будут лежать выше оси X, другие ниже.

Слагаемые суммы

$$S = \sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k$$

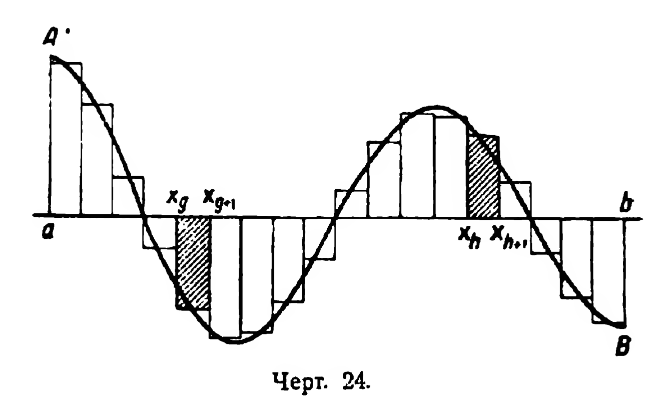
можно разделить на два класса: на положительные и отрицательные.

Пусть

$$f(\xi_h)\Delta x_h$$

— одно из положительных слагаемых. Так как $a < b$, то Δx_h положительно; следовательно, и первый множитель $f(\xi_h)$ тоже положителен, а потому величина слагаемого, очевидно, равна площади элементарного прямоугольника, который весь расположен выше оси X.

Следовательно, *сумма всех положительных слагаемых равна сумме площадей всех тех элементарных прямоугольников, которые расположены выше оси X.*



Черт. 24.

Рассмотрим теперь какое-нибудь отрицательное слагаемое

$$f(\xi_g)\Delta x_g,$$

у которого, следовательно, множитель $f(\xi_g)$ отрицателен.

Прямоугольник, основанием которого служит отрезок (x_g, x_{g+1}), расположен ниже оси X, и высота его как геометрическая величина равна $-f(\xi_g)$, а потому площадь его равна:

$$-f(\xi_g)\Delta x_g.$$

Следовательно, абсолютная величина всякого отрицательного слагаемого суммы S равна площади элементарного прямоугольника, располо-

женного ниже оси X. Очевидно, что *сумма всех отрицательных слагаемых тоже отрицательна и равна по абсолютной величине сумме площадей элементарных прямоугольников, расположенных ниже оси X.*

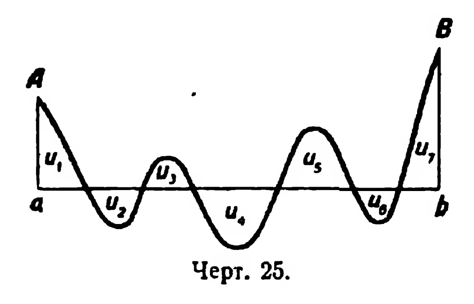
Теперь ясно, что если мы через S_1 обозначим сумму площадей всех тех элементарных прямоугольников, которые лежат выше оси X, а через S_2 — сумму лежащих ниже оси X, то

$$S = S_1 - S_2,$$

а потому если предположим, что число промежуточных точек бесконечно возрастает так, что λ — наибольший промежуток между ними бесконечно умаляется, то

$$\lim S = \lim S_1 - \lim S_2.$$

Но S_1 есть сумма площадей элементарных прямоугольников, лежащих выше оси X; поэтому ее предел равен сумме всех тех площадей, которые ограничены снизу осью X, а сверху — теми частями данной кривой, которые лежат выше оси X.



Черт. 25.

Также ясно, что предел суммы S_2 равен сумме площадей, ограниченных осью X и теми частями кривой, которые лежат ниже оси X.

Поэтому если через u_1, u_3, u_5, ... обозначим те площади, ограниченные кривой, которые лежат выше оси X, а через u_2, u_4, u_6, ... — те, которые лежат ниже (черт. 25), то

$$\lim S_1 = u_1 + u_3 + u_5 + \ldots; \quad \lim S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \ldots,$$

а потому

$$\lim S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots$$

Это равенство легко выразить в словесной форме, если ввести само собой напрашивающееся условие: *будем считать отрицательными те площади, которые лежат ниже оси X.* Так как ординаты тех частей кривой, которые ограничивают эти площади, отрицательны, то, следовательно, мы считаем площади положительными или отрицательными, смотря по тому, положительны или отрицательны ординаты точек этих площадей.

Еще нагляднее это условие можно формулировать так: вообразим подвижную точку, которая движется по кривой слева направо, увлекая с собой свою ординату. Мы будем считать положительными те площади, которые пробегаются положительными ординатами, и отрицательными те, которые пробегаются отрицательными ординатами.

Приняв это условие, мы можем высказать следующее заключение: предел суммы S равен алгебраической сумме тех площадей, которые пробегаются ординатой кривой.

Таким образом, мы не только доказали, что сумма S имеет предел, но и нашли, чему он равен. Однако, этого мы достигли, предполагая, что $a < b$. Пусть же теперь $a > b$ (черт. 26).

В данном случае все разности Δx_k будут отрицательны, потому что числа

$$a, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad b$$

образуют убывающий ряд. Поэтому какое-нибудь слагаемое суммы, например слагаемое

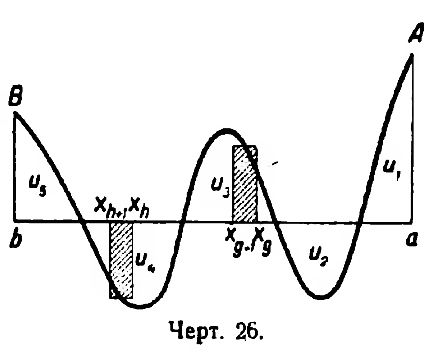
$$f(\xi_h)\,\Delta x_h,$$

будет положительным только тогда, когда множитель $f(\xi_h)$ отрицателен. Следовательно, соответствующий элементарный прямоугольник будет расположен ниже оси X. Если же мы возьмем какое-нибудь отрицательное слагаемое

$$f(\xi_g)\,\Delta x_g,$$

то соответствующий элементарный прямоугольник уже будет лежать выше оси X.

Таким образом в рассматриваемом случае сумма положительных слагаемых равна сумме элементарных прямоугольников, лежащих ниже оси X; абсолютная же величина суммы отрицательных слагаемых равна сумме элементарных прямоугольников, расположенных выше оси. Поэтому, обозначая попрежнему через S_1 и S_2 суммы площадей элементарных прямоугольников, соответственно расположенных выше и ниже оси X, мы в рассматриваемом случае имеем:



Черт. 26.

$$S = -S_1 + S_2,$$

$$\lim S = -\lim S_1 + \lim S_2,$$

и, следовательно,

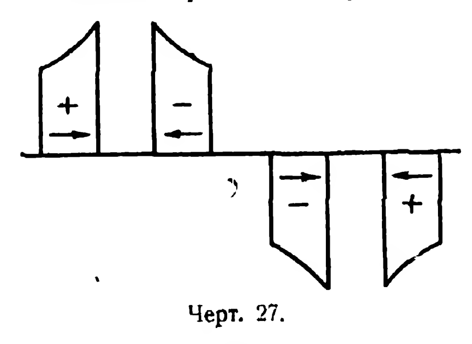
$$\lim S = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \ldots$$

Мы видим, что из площадей, ограниченных частями данной кривой, теперь выгодно условиться считать отрицательными те, которые лежат выше оси X, а положительными — те, которые лежат ниже оси X, т. е. выгодно ввести условия, повидимому, противоположные ранее принятым. Но заметим, что теперь начало кривой A лежит правее конца ее B. Поэтому при движении точки по кривой от ее начала к концу ордината fe движется не слева направо, как то было раньше, а справа налево.

Раньше мы условились считать площади положительными или отрицательными, смотря по тому, описываются ли они положительными или отрицательными ординатами, но при этом предполагалось, что сама ордината движется слева направо, т. е. в положительном направлении оси X.

Теперь мы к этому условию добавим новое: мы будем считать, что если ордината движется справа налево, то тогда площадь, описываемая положительной ординатой, отрицательна, а площадь, описываемая отрицательной ординатой, *положительна. При таком условии и в том случае,* когда $a > b$, мы можем сказать, что предел суммы S равен алгебраической сумме площадей, описываемых ординатой кривой.

Заключение прежнее: различие только в том, что когда $a < b$, то ордината движется в положительном направлении оси X, а когда $a > b$, то движение ординаты совершается в сторону отрицательного направления оси X. Вообще же все условия относительно знака площадей *ясны из чертежа 27, где стрелка* указывает направление движения ординаты.



Черт. 27.

В словесной форме эти условия можно формулировать так:

Площадь считается положительной, если она пробегается положительной ординатой, движущейся в положительном направлении, при условии менять знак площади, если меняются или знак ординаты или направление ее движения.

В дальнейшем алгебраическую сумму площадей, пробегаемых *ординатой, мы будем просто называть площадью, описываемой* данной ординатой.

При этих условиях имеет место следующая основная

***Теорема.* Если число промежуточных точек x_k бесконечно возрастает так, что наибольший промежуток между ними бесконечно умаляется, то интегральная сумма**

$$S = \sum_a^b f(x)\,\Delta x$$

стремится к единственному вполне определенному пределу, равному площади, пробегаемой в направлении от a к b ординатой кривой, уравнение которой $y = f(x)$.

Следовательно, эта теорема дает нам два факта: первый — сумма S имеет предел, второй — этот предел не зависит ни от выбора точек x_k, ни от выбора точек ξ_k, лишь бы наибольший промежуток в пределе равнялся нулю.

Предел интегральной суммы всегда вычисляется в предположении, что наибольший промежуток между точками деления бесконечно умаляется. Поэтому

когда говорят о пределе интегральной суммы, то обычно говорят просто о ее пределе, не указывая на то, что при переходе к пределу наибольший промежуток между точками деления должен стремиться к нулю.

Не указывается потому, что это всегда само собой подразумевается.

§ 15. Интеграл как предел суммы.

***Определение.* Предел интегральной суммы**

$$S=\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

называется интегралом от функции $f(x)$; пределы же интегральной суммы, т. е. a и b, называются пределами интеграла: a — нижним, b — верхним. Интервал (a, b) называется интервалом интеграции.

Следовательно, если

$$A=\lim\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

то A есть интеграл от функции $f(x)$.

Относительно термина „интеграл" заметим следующее: термины „диференцирование" и „интегрирование" употребляются в науке в весьма широком смысле. Под диференцированием разумеют тот момент в процессе исследования, в который исследуемый предмет или явление разлагают на отдельные части, чтобы тем самым получить возможность исследовать его по частям. После того как отдельные части предмета исследованы, то чтобы получить понятие о всем предмете, мы должны связать отдельные исследования в одно целое. Этот процесс называется интегрированием *). Отсюда термин „интеграл" для результата интегрирования. Тот отдел математики, который исследует свойства интегралов, получил название интегрального исчисления.

Раз установлено понятие об интеграле, то возникает вопрос об его обозначении.

В настоящее время для определенного интеграла принят символ, хорошо напоминающий происхождение этого понятия. Пусть попрежнему

$$A=\lim\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{1}$$

или короче

$$A=\lim\sum_a^b f(x)\,\Delta x. \tag{2}$$

Так как безразлично, на какие подъинтервалы делить основной интервал, то предположим, что деление производится на равные подъинтервалы. Тогда во (2) под символом Δx можно разуметь общую длину этих подъинтервалов.

Вспомнив, что диференциал независимого переменного равен приращению его, мы можем представить равенство (2) в таком виде:

$$A=\lim\sum_a^b f(x)\,dx.$$

---

*) От латинского корня integer (целый).

3*

Введем теперь последнее упрощение: в правой части этого равенства мы опустим символ „lim“ и вместо символа Σ будем писать символ $\int$, который носит название знака интеграла и есть не что иное, как старинное удлиненное латинское S *). Тогда получим:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx,$$

что буквально надо читать так: A равно пределу суммы, слагаемые которой типа $f(x)\,dx$.

Интеграл от функции $f(x)$ между нижним пределом a и верхним пределом b обозначается так:

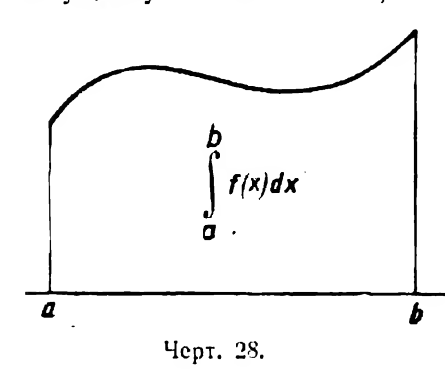
$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

что читается: интеграл от функции $f(x)$ от a до b.

Функция $f(x)$ называется подъинтегральной функцией.

Таким образом, мы имеем следующее основное равенство, которое по существу есть не что иное, как определение интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$



Черт. 28.

Вспомнив, что предел интегральной суммы равен площади, пробегаемой ординатой кривой, мы видим (черт. 28):

Геометрически интеграл равен площади, пробегаемой ординатой кривой, изображающей подъинтегральную функцию, при изменении аргумента функции от нижнего предела интеграла до верхнего.

Итак, предел всякой интегральной суммы мы назвали интегралом. Но, как мы видели раньше, интегралом от данной функции называется также и всякая ее первообразная. Следовательно, термин „интеграл“ употребляется в двух весьма различных смыслах. Поэтому

надо отчетливо отличать интеграл как предел суммы от интеграла как первообразной.

В этой главе понятие интеграла будет употребляться исключительно в первом смысле.

§ 16. Интеграл с равными пределами.

До сих пор мы предполагали, что пределы интеграла a и b не равны между собой. Но нередко приходится рассматривать интегралы с равными пределами. Очевидно, что для таких интегралов прежнее определение не

---

*) Начальная буква слова summa (сумма).

годится хотя бы потому, что если a равно b, то между ними нельзя вставить промежуточных чисел. Необходимо ввести новое определение, которое в то же время находилось бы в тесной связи с прежним. Этого мы достигнем, если воспользуемся геометрическим значением интеграла, согласно которому интеграл

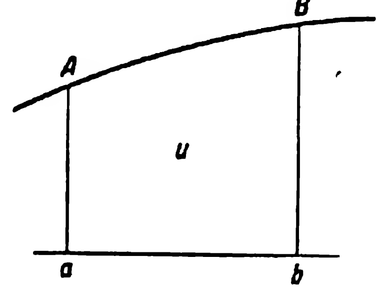
$$u = \int_a^b f(x)\,dx,$$

пока a не равно b, геометрически представляется площадью трапеции $aABb$ (черт. 29). Эта площадь, если b будет приближаться к a, и, наконец, совпадет с a, обратится в нуль, а потому:

если пределы интеграла равны, то интеграл по определению принимается равным нулю.

Следовательно, какое бы ни было c, всегда

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$



Черт. 29.

Установив понятие интеграла, мы естественно должны теперь поставить вопрос о методах его вычисления. Но чтобы перейти к этому, как увидим, очень трудному вопросу, предварительно рассмотрим некоторые основные свойства интеграла.

§ 17. Три теоремы.

Опираясь на определение интеграла и на его геометрическое значение, мы легко докажем три следующие простые теоремы.

Теорема о выносе постоянного множителя. **Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла. Следовательно**

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

где A — постоянное.

Те суммы, пределами которых являются интегралы

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b Af(x)\,dx,$$

обозначим соответственно через s и σ. Следовательно,

$$s = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Заменяя же $f(x)$ через $Af(x)$, будем иметь

$$\sigma = Af(\xi_0)\Delta x_0 + Af(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + Af(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Ясно, что

$$\sigma = As,$$

т. е. что

$$\sum_a^b Af(\xi_k)\,\Delta x_k = A\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

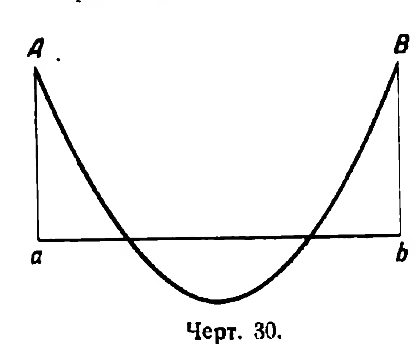
Переходя к пределу, получим

$$\lim \sum_a^b Af(\xi_k)\,\Delta x_k = A \lim \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

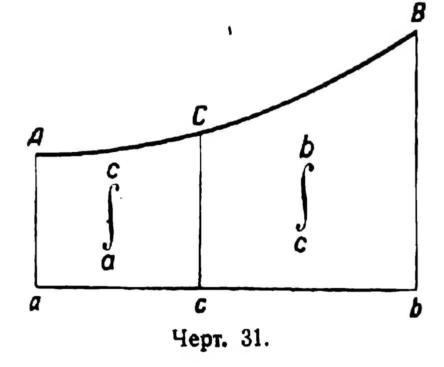
т. е.

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,$$

и теорема доказана.



Черт. 30.



Черт. 31.

Теорема о перестановке предела. **Если переставить между собой пределы интеграла, то интеграл изменит знак:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{2}$$

Интеграл

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

геометрически равен площади, пробегаемой ординатой, движущейся в направлении от a к b (черт. 30). Интеграл

$$B = \int_b^a f(x)\,dx$$

равен той же площади, но пробегаемой в обратном направлении. Следовательно, $B = -A$, и теорема доказана.

Теорема о делении интервала интеграции. Всегда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{3}$$

какое бы ни было c, но при условии, что функция непрерывна в каждом интервале интеграции.

Эта теорема очевидна для того случая, когда $a<b$ и функция $f(x)$ принимает в интервале (a, b) только положительные значения, так что кривая $y=f(x)$ лежит выше оси X (черт. 31). Что касается точки c, то она лежит между a и b. В этом случае интеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ изображается площадью трапеции $aACc$, а интеграл $\int_c^b f(x)\,dx$ — площадью трапеции $cCBb$. Сумма их

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

даст площадь трапеции $aABb$, т. е. интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

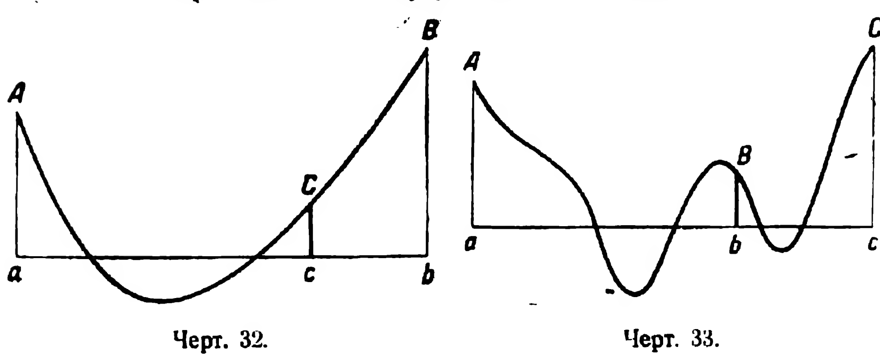
и мы получаем равенство (3). Таким образом, в этом случае теорема выражает тот простой факт, что всякая площадь равна сумме тех частей, на которые она разделена.

Приступая к доказательству теоремы для общего случая, когда функция $f(x)$ может принимать и отрицательные значения, положим для сокращения письма

$$G=\int_a^b f(x)\,dx, \quad H=\int_a^c f(x)\,dx, \quad K=\int_c^b f(x)\,dx$$

и будем сначала считать, что $a<b$.

Точка c может лежать или внутри или вне интервала (a, b).



Черт. 32. Черт. 33.

Если c лежит между a и b, то при движении от a к b ордината описывает площадь, равную G (черт. 32). При этом она сначала описывает площадь $aACc$, равную H, к которой затем прибавляется площадь $cCBb$, равная K, а потому

$$G=H+K, \tag{4}$$

и мы имеем равенство (3).

Если c лежит правее b, то b лежит между a и c (черт. 33). По доказанному

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Меняя пределы в последнем интеграле, опять получим (3).

Или можем рассуждать так: пусть ордината движется от a к c и затем от c к b. Она опишет сумму площадей, равную

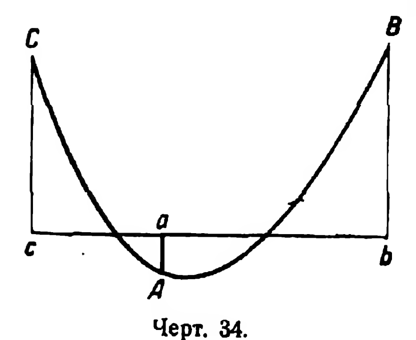
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Но при этом площадь $bBCc$ пробегается дважды в противоположных направлениях. Поэтому, когда ордината движется от a до c, то тó, что она пробегает при движении от b к c, уничтожается, как бы стирается, при ее движении от c к b. Остается только то, что она описывает при движении от a к b, т. е. остается площадь, равная

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Приравнивая этот интеграл сумме (5), опять получим равенство (3), и теорема доказана для случая, когда c лежит правее b. Если c левее a (черт. 34), то двигаем ординату от a к c, потом от c к b. Она опишет сумму площадей, равную

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



Черт. 34.

Но так как при этом площадь $aACc$ пробегается два раза в противоположных направлениях, то остается только площадь $aABb$, и мы снова получаем равенство (3).

Теперь теорема окончательно доказана для случая $a < b$. Но если $a > b$, то $b < a$ и по доказанному

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx.$$

Перестановка пределов дает

$$-\int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx,$$

т. е. опять имеем равенство (3), и теорема окончательно доказана.

§ 18. Заключение.

1. Определение. Интегральной суммой от непрерывной функции $f(x)$, взятой между нижним и верхним пределами a и b, называется сумма всех слагаемых, которые получаются от умножения длины каждого подъинтервала на значение функции в какой-нибудь его точке.

Предел интегральной суммы в предположении, что все подъинтервалы бесконечно умаляются, называется интегралом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Интеграл с равными пределами принимается равным нулю.

2. Геометрически интеграл равен площади, пробегаемой ординатой кривой при изменении абсциссы от нижнего предела интеграла до верхнего.

3. Теоремы:

$$1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

$$2)\quad \int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$3)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА. ИНТЕГРАЛ КАК ФУНКЦИЯ СВОИХ ПРЕДЕЛОВ.

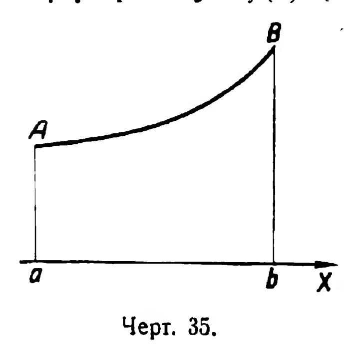
Установив понятие интеграла как предела суммы, мы перейдем теперь к вопросу о фактическом вычислении его.

§ 19. Геометрическое вычисление интеграла.

Так как интеграл

$$u = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

геометрически изображается площадью трапеции $aABb$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$ (черт. 35), то, с одной стороны, чтобы знать числовое значение этой площади, мы должны вычислить интеграл (1). Но, с другой стороны, если мы каким-либо иным путем сумеем найти числовое выражение площади трапеции, то тем самым мы будем знать и значение интеграла (1).



Черт. 35.

Если интеграл вычисляется так, что из каких-нибудь соображений находится числовое выражение площади соответствующей ему трапеции, то такое его вычисление назовем вычислением его из геометрических соображений, или, короче, геометрическим его вычислением.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$u = \int_{-1}^{+1} (2 - \sqrt{1 - x^2})\,dx. \tag{2}$$

Строим кривую, изображающую подъинтегральную функцию, т. е. кривую

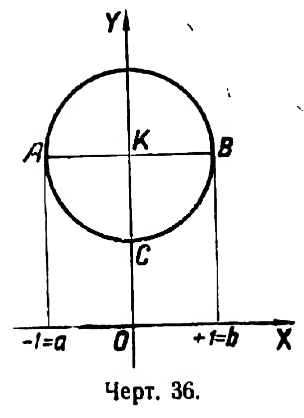
$$y = 2 - \sqrt{1 - x^2}. \tag{3}$$

Из этого равенства следует уравнение

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1. \tag{4}$$

Это—уравнение окружности, радиус которой равен единице и центр которой лежит в точке K на оси Y, причем $OK = 2$ (черт. 36).

Но кривая (3) не есть вся эта окружность, а только нижняя ее половина ACB. Следовательно, интеграл (2) равен площади трапеции $aACBb$, где $a = -1$, $b = +1$, а потому, так как эта площадь равна $4 - \frac{\pi}{2}$, то



Черт. 36.

$$\int_{-1}^{+1} (2 - \sqrt{1 - x^2})\, dx = 4 - \frac{\pi}{2},$$

и интеграл вычислен.

Как ни прост этот способ вычисления, применим он, очевидно, исключительно в редких случаях, а именно в тех, когда трапеция может быть составлена из частей, площади которых уже известны. Поэтому необходимо искать другие пути для вычисления интеграла, тем более что понятие интеграла мы ввели не для того, чтобы находить его значение через площадь соответствующей трапеции, а для того, чтобы через него получить возможность вычислять площади.

§ 20. Метод непосредственного вычисления интеграла.

Одним из путей, ведущих к вычислению интеграла, является тот путь, на который указывает само определение понятия интеграла. Согласно этому определению интеграл есть предел суммы, названной нами интегральной:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \sum_a^b f(\xi_k)\, \Delta x_k.$$

Поэтому ясно, что интеграл будет вычислен, если, построив соответственную сумму, мы сумеем вычислить ее предел.

Когда значение интеграла определяется посредством вычисления предела соответствующей ему интегральной суммы, то говорят, что интеграл вычисляется методом непосредственного интегрирования.

При этом стараются воспользоваться тем, что при построении интегральной суммы

$$S = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1}$$

можно произвольно выбирать как точки x_k, так и точки ξ_k. Этим произволом иногда удается воспользоваться так, что сама сумма S и ее предел легко вычисляются.

Черт. 37.

В частном случае деление интервала точками x_k и выбор точек ξ_k мы можем произвести так: делим интервал (a, b) на n равных частей (черт. 37). Если общую величину этих частей обозначим через h, то очевидно, что

$$x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \; \ldots, \; x_{n-1} = a + (n-1)h, \quad b = a + nh,$$

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Что касается точек ξ_k, то за каждую из них примем левый конец соответствующего подъинтервала, т. е. примем $\xi_k = x_k$. Тогда будем иметь:

$$\xi_0 = a, \quad \xi_1 = a + h, \quad \xi_2 = a + 2h, \; . \; . \; . \; , \; \xi_{n-1} = a + (n-1)h,$$

и так как ясно, что все Δx_k равны h:

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \; . \; . \; . = \Delta x_{n-1} = h = \frac{b-a}{n},$$

то при таком выборе точек x_k *и* ξ_k *сумма* S *примет вид:*

$$S = h\,\{ f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \; . \; . \; . + f(a+(n-1)h) \} =$$
$$= (b-a)\frac{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \; . \; . \; . + f(a+(n-1)h)}{n}.$$

Переход к пределу будет заключаться в том, что n будет стремиться к ∞. Итак,

интегральную сумму S, пределом которой является данный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim S,$$

всегда можно представить в такой форме:

$$S = (b-a)\,\frac{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+(n-1)h)}{n}. \quad (1)$$

Рассмотрим пример. Пусть требуется вычислить интеграл

$$G = \int_0^l x^2\,dx. \quad (2)$$

Полагая в (1) $a = 0$, $b = l$, имеем:

$$S = l\,\frac{f(0) + f(h) + f(2h) + \; . \; . \; . + f((n-1)h)}{n}, \qquad h = \frac{l}{n},$$

и так как теперь $f(x) = x^2$, то

$$f(0) = 0, \quad f(h) = h^2, \quad f(2h) = 2^2 h^2, \quad f(3h) = 3^2 h^2, \; . \; . \; . \; ,$$

а потому

$$S = \frac{lh^2}{n}\,\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \; . \; . \; . + (n-1)^2 \}, \quad h = \frac{l}{n}. \quad (3)$$

Так как *)

$$\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \; . \; . \; . + (n-1)^2 \} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$
$$= \frac{n}{6}(2n^2 - 3n + 1), \quad (4)$$

*) См. „Введение в анализ“, стр. 157, формула (8).

то

$$S = \frac{l^3}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Ясно, что если $n \to \infty$, то

$$\lim S = \frac{l^3}{3},$$

а потому

$$\int_0^l x^2\,dx = \frac{l^3}{3}. \tag{5}$$

Применяя теорему о делении интервала интеграции, имеем

$$\int_a^b x^2\,dx = \int_a^0 x^3\,dx + \int_0^b x^2\,dx = \int_0^b x^2\,dx - \int_0^a x^2\,dx,$$

а потому согласно (5)

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}. \tag{6}$$

Рассмотрим еще пример. Вычислим интеграл

$$O = \int_a^b e^{mx}dx, \tag{7}$$

где m — постоянное число. Полагая в (1)

$$f(x) = e^{mx},$$

имеем

$$S = (b - a)\frac{e^{ma} + e^{m(a+h)} + e^{m(a+2h)} + \ldots + e^{m(a+(n-1)h)}}{n}.$$

Применяя к числителю формулу суммы геометрической прогрессии, найдем

$$S = \frac{b-a}{n}\,\frac{e^{m(a+nh)} - e^{ma}}{e^{mh} - 1} = \frac{h}{e^{mh} - 1}(e^{mb} - e^{ma}).$$

Переходим к пределу, предполагая, что $h \to 0$. Правило Лопиталя дает

$$\lim_{h \to 0}\frac{h}{e^{mh} - 1} = \frac{1}{m},$$

а потому

$$\lim S = \frac{1}{m}(e^{mb} - e^{ma}),$$

и, следовательно,

$$\int_a^b e^{mx}dx = \frac{1}{m}e^{mb} - \frac{1}{m}e^{ma}. \tag{8}$$

Рассмотренные два примера, особенно первый, ясно показывают, что метод непосредственного интегрирования вообще связан с достаточно утомительными вычислениями. Кроме того, отметим, что фактически этот метод с успехом может быть применен в очень небольшом числе случаев. Поэтому вопрос о фактическом вычислении определенных интегралов пока остается открытым.

§ 21. О роли задач в интегральном исчислении.

Задачи в интегральном исчислении играют значительно бо́льшую роль, чем в диференциальном. Увидим, что некоторые отделы интегрального исчисления для действительного их усвоения требуют, чтобы было решено большее или меньшее число соответствующих задач.

В этом курсе там, где встречается необходимость, будут указаны номера соответствующих задач из задачника, составленного авторами этой книги*). Конечно, какое именно число из указанных задач необходимо должно быть решено, относительно этого может быть дано только самое общее указание: столько, сколько их необходимо, чтобы читатель почувствовал, что он вполне овладел соответствующим методом. Но если относительно каких-нибудь задач будет сказано, что их рекомендуется решить, то, конечно, они должны быть решены. Заметим, что в задачнике те задачи, которые представляют особый теоретический или практический интерес, напечатаны жирным шрифтом или отмечены звездочкой**).

§ 22. Переменное интеграции.

Прежде чем итти дальше, мы должны остановиться на некоторых сторонах понятия интеграла.

Аргумент всякой функции необходимо должен быть обозначен некоторым символом, которым обычно служит буква.

Символ, которым обозначен аргумент подъинтегральной функции, называется переменным интеграции.

Следовательно, если

$$u=\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

то x — переменное интеграции.

Обратим теперь особое внимание на то, что интеграл ни в коем случае не есть функция переменного интеграции x, хотя x и фигурирует явно в правой части (1). Но роль его своеобразна. Действительно, вспомнив, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim S,$$

где

$$S=f(\xi_0)(x_1-a)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+f(\xi_2)(x_3-x_2)+\ldots+f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1}),$$

*) Полное его заглавие: И. Жегалкин и М. Слудская, „Систематический сборник задач по интегральному исчислению“, Учпедгиз, 1934 г.

**) К методу непосредственного интегрирования относятся задачи № 401 и 402. Из них рекомендуется решить задачу № 401. К методу геометрического вычисления относятся задачи № 403—406.

мы ясно видим, что в выражение суммы S аргумент x как раз не входит; S зависит не от x, а только от промежуточных чисел x_k и ξ_k. Следовательно, и предел суммы S не может быть функцией x. Мы же знаем кроме того, что этот предел не зависит и от выбора промежуточных значений x_k и ξ_k. Таким образом,

интеграл не есть функция переменного интеграции. В выражении

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

вся роль переменного x заключается только в том, чтобы указать, с помощью какой функции составлен данный интеграл.

Поэтому вместо x мы вполне могли бы написать и иную букву, например y или z, и имели бы, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Так, например, мы нашли, что (стр. 45)

$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad \int_a^b e^x dx = e^b - e^a. \tag{2}$$

Мы видим: в правых частях этих равенств нет x, а потому и интегралы не функции его. Поэтому же вместо равенств (1) мы можем также написать, что

$$\int_a^b z^2dz = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad \int_a^b e^z dz = e^b - e^a,$$

или

$$\int_a^b t^2dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad \int_a^b e^t dt = e^b - e^a.$$

Черт. 38.

Теперь ясно, что

$$\int_a^b x^2dx = \int_a^b y^2dy = \int_a^b z^2dz.$$

Все это становится вполне очевидным, когда мы вспомним геометрическое значение интеграла. Если

$$u = \int_a^b f(x)\,dx,$$

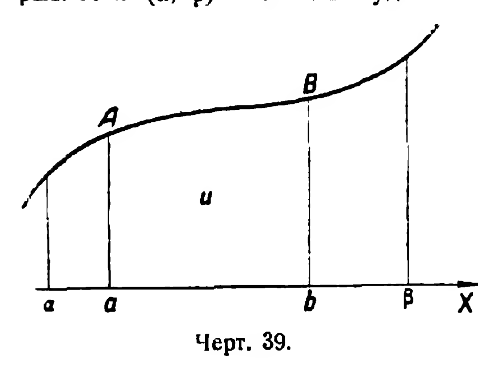
то u — площадь трапеции $aABb$. Ясно, что эта площадь вполне зависит от формы кривой, ограничивающей ее сверху. Но она совершенно не зависит от абсциссы x произвольно взятой точки M на этой кривой. Поэтому и интеграл зависит не от x, а от вида функции $f(x)$. Он зависит от f, от характеристики функции, а не от ее аргумента.

§ 23. О пределах интеграла.

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная в интервале (α, β), и пусть попрежнему

$$u = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Спрашивается: какие значения мы можем брать для пределов интеграла a и b? Ясно, что можем брать любые значения в интервале непрерывности (α, β). Если мы будем менять эти значения, то тем самым будет меняться и значение интеграла. Так, например, если мы будем увеличивать b, то для чертежа 39 ордината bB будет двигаться вправо, а потому площадь трапеции будет увеличиваться. Она будет также увеличиваться, если мы будем уменьшать нижний предел a.



Черт. 39.

Но если в (1) мы можем давать пределам a и b различные значения, то на них мы должны смотреть как на переменные. Следовательно,

пределы интеграла могут быть переменными величинами.

Но если a и b — переменные, то всякий раз как мы дадим им некоторые значения, интеграл u получит некоторое определенное значение, а потому u есть функция a и b. Следовательно,

если пределы интеграла—переменные величины, то интеграл, не будучи функцией переменного интеграции, есть функция своих пределов.

Так, например, мы знаем, что

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Если a и b — переменные, то правая часть равенства есть функция их, а потому и левая часть, т. е. интеграл, тоже функция a и b, но не функция x.

Конечно, если мы одному из пределов, например нижнему, дадим какое-нибудь значение и не будем менять его, то интеграл станет функцией только одного верхнего предела. Если же мы обоим пределам дадим постоянные значения, то интеграл станет постоянной величиной. Вообще

пределы интеграла могут быть или оба переменными, или оба постоянными, или один из них может быть переменным, другой постоянным.

Так, например, если z и t — переменные, то интеграл

$$\int_z^t x^2 dx = \frac{t^3}{3} - \frac{z^3}{3}$$

есть интеграл с двумя переменными пределами.

Полагая или $z=0$, или $t=0$, найдем

$$\int_0^t x^2\,dx = \frac{t^3}{3}, \quad \int_z^0 x^2\,dx = -\frac{z^3}{3}.$$

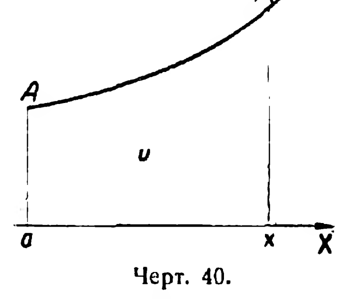
Каждый из этих интегралов имеет только один переменный предел. Наконец, интеграл

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$$

будет интегралом с постоянными пределами. Он уже не функция, а число.

Особого внимания заслуживают интегралы, у которых нижний предел постоянный, а верхний переменный. Таким будет, например, интеграл

$$\int_0^z x^2\,dx = \frac{z^3}{3}.$$



Черт. 40.

Интеграл с переменным верхним пределом и постоянным нижним пределом, т. е. интеграл типа

$$\int_a^z f(x)\,dx,$$

где a — постоянное, z — переменное, называется интегралом как функция верхнего предела.

Конечно, вместо z верхним пределом может быть любая переменная величина. Так, например, все интегралы

$$\int_a^t f(x)\,dx, \quad \int_1^v f(x)\,dx, \quad \int_2^y f(x)\,dx$$

— интегралы как функции своих верхних пределов.

Очень часто приходится рассматривать интегралы с постоянным нижним пределом, причем верхним пределом служит как раз аргумент функции. Так, например (черт. 40), выберем на кривой $y=f(x)$, хотя и произвольно, но раз навсегда, точку A с абсциссой a. Следовательно, a будет обозначать постоянную величину. Ординату aA назовем началом отсчета площадей, и пусть M — переменная точка на кривой с абсциссой x. Если через u обозначим площадь трапеции $aAMx$, то ясно, что u есть функция x, потому что с изменением x меняется и u, но всякий раз, как x принимает определенное значение, u тоже принимает определенное значение. Ясно, что u представится интегралом, нижний предел которого равен a, верхний же x. Но написать

$$u = \int_a^x f(x)\,dx \tag{1}$$

в этом случае уже нельзя, потому что, как общее правило, один и тот же символ в течение одного и того же рассуждения не должен служить для различных целей. Следовательно, если x уже служит для обозначения верхнего предела, то для обозначения переменного интеграции мы должны взять иную какую-нибудь букву, например y, и написать так:

$$u = \int_a^x f(y)\, dy, \tag{2}$$

или, прибегая к букве z, так:

$$u = \int_a^x f(z)\, dz \tag{3}$$

и т. д.

Но введение значительного числа различных символов часто создает неудобства. Поэтому вошло в обычай вместо правильных обозначений (2) и (3) писать:

$$\int_a^x f(x)\, dx, \tag{4}$$

причем в данном случае x играет как бы двойную роль: роль предела и роль переменного интеграции. Необходимость различать эти две его роли становится особенно ясной, если мы переменному x как пределу приписываем какое-нибудь числовое значение, например $x = 3$. Тогда интеграл (4) принимает значение, которое изобразится так:

$$\int_a^3 f(x)\, dx,$$

т. е. мы должны заменить x его значением не везде, а только в верхнем пределе. Подставить же вместо x его значение также и в подъинтегральное выражение, т. е. написать выражение

$$\int_a^3 f(3)\, d3,$$

это значило бы написать бессмыслицу. Итак,

когда символ аргумента функции служит верхним пределом интеграла, то принято для обозначения переменного интеграции сохранять тот же символ.

Так, например, зная, что

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

мы должны были бы точно написать или так:

$$\int_0^x z^2\, dz = \frac{x^3}{3},$$

или вместо z взять иную любую букву, кроме x. Но обычно пишут так:

$$\int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$$

При этом двойная роль x в левой части становится ясной, если мы примем $x=3$. Тогда получим

$$\int_0^3 x^2\,dx = 9.$$

§ 24. Трапеция с основанием на оси Y.

До сих пор мы рассматривали трапеции, основания которых совпадали с осью X. Но ясно, что отрезок всякой прямой может служить основанием трапеции. Между прочим основание трапеции может совпадать с осью Y (черт. 41).

Предположим вообще, что мы имеем некоторую кривую PQ, для которой x — однозначная функция y (черт. 41):

$$x = \phi(y). \qquad (1)$$

Взяв на этой кривой две точки A и B с ординатами α и β, опустим из них перпендикуляры $A\alpha$ и $B\beta$ на ось Y. Получим трапецию $\alpha AB\beta$, площадь которой обозначим через v. Ясно, что

$$v = \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy, \qquad (2)$$

потому что все отличие от предыдущего только в том, что теперь y играет роль x.

Черт. 41.

На чертеже 41 кривая лежит справа от оси Y. Если же она лежит по обе стороны этой оси (черт. 42), то интеграл (2) будет равен сумме площадей, пробегаемых абсциссой точки M при движении ее от A к B при условии считать из площадей $v_1, v_2, v_3, \ldots$ лежащие справа от оси Y положительными, а слева — отрицательными.

Заметив это, вычислим из геометрических соображений интеграл

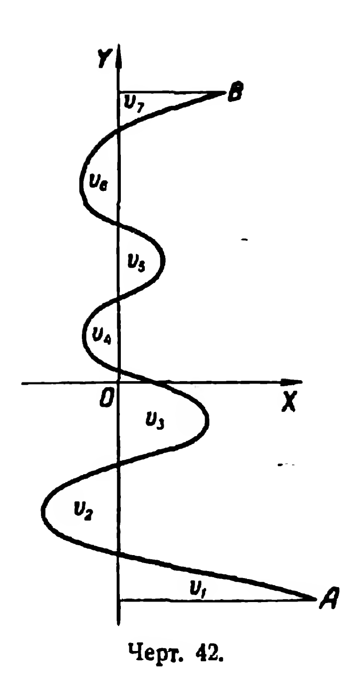
$$u = \int_1^x \ln x\,dx. \qquad (3)$$

Строим кривую (черт. 43)

$$y = \ln x. \qquad (4)$$

Она пересекает ось абсцисс в точке $x=1$. Пусть M — точка на ней с координатами x и y. Интеграл (3) равен площади AMP. Чтобы вычислить эту площадь, вычислим сначала площадь v трапеции $OAMQ$. Так как из (4)

$$x = e^y,$$



Черт. 42.

то по формуле (2)

$$v=\int_0^y e^y dy.$$

Мы знаем (стр. 45), что

$$\int_a^b e^{mx}\,dx=\frac{1}{m}(e^{mb}-e^{ma}).$$

Поэтому

$$v=e^y-e^0=x-1,$$

и так как $u=xy-v=x\ln x-x+1$, то окончательно

$$\int_1^x \ln x\,dx=x\ln x-x+1,$$

и интеграл (3) вычислен.

Разберем еще пример. Пусть $M(x, y)$ — точка на верхней части параболы

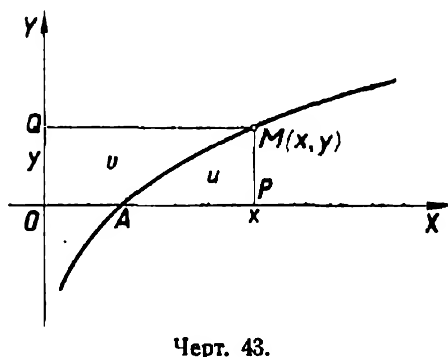
$$y^2=2px, \tag{5}$$

MP и MQ — перпендикуляры из нее на оси координат (черт. 44). Через u и v обозначим площади фигур OMP и OMQ. Так как для верхней части параболы

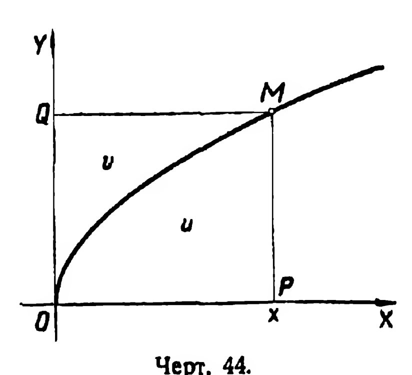
$$y=+\sqrt{2px},$$

то

$$u=\int_0^x \sqrt{2px}\,dx.$$



Черт. 43.



Черт. 44.

Но мы не знаем интеграла в правой части. Поэтому попытаемся вычислить площадь v. Для нее имеем:

$$x=\frac{y^2}{2p},\qquad v=\int_0^y \frac{y^2}{2p}dy=\frac{1}{2p}\int_0^y y^2\,dy.$$

Вспомнив, что

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

заключаем

$$v = \frac{y^3}{6p} = \frac{y \cdot y^2}{6p} = \frac{yx}{3}. \tag{6}$$

Но xy — площадь прямоугольника $OPMQ$, а потому ясно, что

$$u = \frac{2xy}{3}, \tag{7}$$

и площадь u вычислена. Из (6) и (7) следует, что $u = 2v$.

Следовательно, парабола делит прямоугольник $OPMQ$ на такие две части, из которых одна вдвое больше другой.

§ 25. Заключение.

1. Интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

не есть функция переменного интеграции x, но функция своих пределов a и b. Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2. Если верхним пределом интеграла служит аргумент функции, то принято этот предел интеграла и переменное интеграции обозначать одной и той же буквой. Поэтому вместо точных обозначений вида

$$\int_a^x f(z)\,dz, \quad \int_a^x f(t)\,dt$$

принято писать

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

ВЫРАЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ЧЕРЕЗ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНОЙ.

Для фактического вычисления интеграла метод непосредственного интегрирования, как было указано, совершенно непригоден. Поэтому хотя задача о квадратуре площади и была поставлена еще в глубокой древности, однако в течение долгого времени не было сделано ни одного значительного шага для ее решения. Этот шаг был сделан только в новейшее время, когда было введено понятие производной и когда оказалось, что между интегралом данной функции и ее первообразной существует тесная связь. К выяснению этой связи мы теперь и перейдем.

§ 26. Символы подстановки.

Чтобы потом не прерывать нить изложения, введем сначала понятие о символах подстановки.

Чтобы показать, что в данном математическом выражении $\Phi(x)$ надо переменное x заменить через c, пишут

$$\Big/^{x=c} \Phi(x).$$

Символ

$$\Big/^{x=c},$$

состоящий из несколько наклонной прямой черты, называется символом простой подстановки. Следовательно, по определению

$$\Big/^{x=c} \Phi(x) = \Phi(c).$$

Так, например, имеем:

$$\Big/^{x=5} \frac{1+x^3}{2+x} = \frac{1+5^2}{2+5} = \frac{26}{7},$$

$$\Big/^{x=\frac{\pi}{2}} (x+\cos^2 x) = \frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Но очень часто приходится в функции $\Phi(x)$ заменять x сначала через a, потом через b и затем первый результат вычитать из второго, т. е. приходится составлять разность

$$\Phi(b) - \Phi(a).$$

Для указания на этот процесс пользуются символом

$$\Big|_{x=a}^{x=b},$$

называемым символом двойной подстановки, и пишут

$$\Big|_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Это равенство можно переписать в такой форме:

$$\Big|_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = \Big|^{x=b} \Phi(x) - \Big|^{x=a} \Phi(x).$$

Отсюда символическое равенство:

$$\Big|_{x=a}^{x=b} = \Big|^{x=b} - \Big|^{x=a}$$

Величины a и b называются *нижним* и *верхним* пределами подстановки.

Например, имеем

$$\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} x^2 \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi^2}{16} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{4} - 0^2 \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi^2}{16}.$$

Но часто пользуются и иным обозначением, а именно часто пишут так:

$$[\Phi(x)]_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a),$$

заключая данное выражение в квадратные скобки. Например,

$$\left[\frac{1+x^3}{1+x}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1+8}{1+2} - \frac{1}{1} = 2.$$

Иногда еще короче пишут так:

$$[\Phi(x)]_a^b.$$

Следовательно, для указания на двойную подстановку употребляются такие обозначения:

$$\Big|_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b} = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

§ 27. Выражение интеграла через значения первообразной.

Первообразной, или интегралом данной функции, мы назвали всякую функцию, производная которой равна данной функции.

Следовательно, если $\Phi'(x) = f(x)$, то функция $\Phi(x)$ есть интеграл, или первообразная, данной функции $f(x)$.

Мы видим, что слово „интеграл" употребляется в двух глубоко различных смыслах. Надо отчетливо различать интеграл как предел суммы от интеграла как первообразной.

Интеграл как предел суммы обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Интеграл как первообразную будем обозначать так:

$$\int f(x)\,dx.$$

Различие между обозначениями очевидно. В том и другом случае мы имеем один и тот же знак интеграла, но во втором случае при нем отсутствуют символы пределов, которые необходимо должны быть в первом случае.

Так как употреблять одно и то же слово в двух различных смыслах, пока не приобретена к тому привычка, несколько затруднительно, то в этой главе под интегралом мы будем исключительно разуметь только интеграл как предел суммы. Интеграл же как первообразную будем просто называть первообразной.

Заметив это, предположим, что требуется вычислить интеграл

$$G = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

от некоторой функции $f(x)$, непрерывной в интервале (a, b). Этот интеграл есть предел интегральной суммы

$$S = f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}), \tag{2}$$

при построении которой мы можем произвольно брать не только все точки x_k, но также в каждом подъинтервале (x_k, x_{k+1}) и точку ξ_k. Этим последним произволом мы сейчас и воспользуемся.

Предположим, что каким бы то ни было путем мы нашли первообразную для данной функции $f(x)$. Пусть это будет функция $\Phi(x)$. Следовательно,

$$\Phi'(x) = f(x). \tag{3}$$

Тогда интеграл G и сумма S могут быть переписаны в такой форме:

$$G = \int_a^b \Phi'(x)\,dx,$$

$$S = \Phi'(\xi_0)(x_1 - a) + \Phi'(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \Phi'(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}). \tag{3'}$$

Отметим еще раз, что каждая из точек ξ_k может быть взята произвольно в соответствующем ей подъинтервале.

Применяя теперь теорему Лагранжа к функции $\Phi(x)$ для интервала (x_k, x_{k+1}), имеем равенство:

$$\Phi(x_k) - \Phi(x_{k+1}) = \Phi'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

и так как $\Phi'(x) = f(x)$, то

$$\Phi(x_k) - \Phi(x_{k+1}) = f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Написав такое равенство для всякого подъинтервала, получим систему равенств:

$$\begin{aligned}
&\Phi(x_1) - \Phi(a) = f(\xi_0)(x_1 - a),\\
&\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = f(\xi_1)(x_2 - x_1),\\
&\Phi(x_3) - \Phi(x_2) = f(\xi_2)(x_3 - x_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Phi(x_{n-1}) - \Phi(x_{n-2}) = f(\xi_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}),\\
&\Phi(b) - \Phi(x_{n-1}) = f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь числа $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ берутся уже не произвольно. Напротив, всякий символ ξ_k обозначает некоторое, хотя нам и неизвестное, но вполне определенное число в интервале (x_k, x_{k+1}). Напротив, в равенстве (3) каждое ξ_k в том же интервале мы можем брать произвольно.

Но если в (3) числа ξ_k могут быть взяты произвольно, то возьмем их так, чтобы их значения были соответственно равны как раз тем значениям, которые они имеют в равенствах (4). При таком выборе их, складывая все равенства (4), получаем равенство

$$\Phi(b) - \Phi(a) = S.$$

Следовательно,

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Видим, что при произведенном выборе точек ξ_k левая часть не зависит даже от выбора чисел x_k. Она — величина постоянная. Но предел постоянной величины равен ей самой, а потому

$$\lim \sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \Phi(b) - \Phi(a),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{5}$$

Это равенство, пользуясь тем или иным символом подстановки, обыкновенно записывается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b}$$

и читается: интеграл равен подстановке от a до b от функции $\Phi(x)$. Получается замечательная

***Теорема*. Интеграл равен разности значений первообразной подъинтегральной функции в точках верхнего и нижнего пределов интеграла. Следовательно, если $\Phi'(x) = f(x)$, то**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{6}$$

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b \cos x\,dx.$$

Вспоминая, что

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x,$$

заключаем: $\sin x$ есть первообразная для $\cos x$, а потому пишем:

$$\int_a^b \cos x\,dx = \Big/_{x=a}^{x=b} \sin x = \sin b - \sin a, \tag{7}$$

и интеграл вычислен *). Точно так же, зная, что

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,$$

заключаем, что для $\sin x$ первообразной служит $-\cos x$, а потому, например,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big/_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} -\cos x = 1,$$

$$\int_{-\pi}^{+2\pi} \sin x\,dx = \Big/_{x=-\pi}^{x=2\pi} -\cos x = -2.$$

Отметим, что равенство (6), где в правой части нет x, ясно показывает, что интеграл есть функция своих пределов a и b, но не функция переменного интеграции. Если же вместо b напишем x, то получим:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Big/_{x=a}^{x=x} \Phi(x) = \Phi(x) - \Phi(a), \tag{8}$$

и двойная роль x особенно ясна в верхнем пределе подстановки, где стоит равенство $x = x$. Здесь в левой части этого равенства x есть переменное интеграции, но в правой части того же равенства буква x уже есть предел интеграла. Если вместо x как переменного интеграции мы напишем z, то получим:

$$\int_a^x f(z)\,dz = \Big/_{z=a}^{z=x} \Phi(z) = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{9}$$

---

*) Сравнить этот метод с методом задачи № 401, (3).

Сравнение (8) и (9) ясно показывает двойную роль x в равенстве (8). Так, например, пусть требуется найти интеграл

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Вспоминая, чему равна производная от $\operatorname{arc\,tg} x$, пишем

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arc\,tg} x]_{x=0}^{x=x} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Вообще можно решить очень много задач, находя непосредственно, путем догадки, первообразную подъинтегральной функции. Вычислим, например, площадь u трапеции $1AMx$ (черт. 45), ограниченной сверху гиперболой

$$y = \frac{1}{x}.$$

Точка A — ее вершина. Ее координаты $x=1$, $y=1$. Имеем

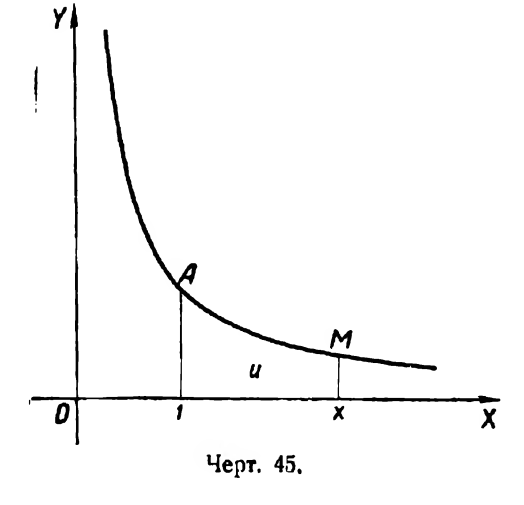
$$u = \int_1^x y\,dx = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx.$$

Вспоминая, что $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$, заключаем

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \Big/_{x=1}^{x=x} \ln x = \ln x.$$

Следовательно,

$$u = \ln x.$$



Черт. 45.

Таким образом, площадь u точно равна логарифму по основанию e. Так как это — площадь гиперболы, то и неперовы логарифмы называются гиперболическими.

Целый ряд интересных геометрических задач можно решить, зная первообразную от степенной функции. Так как

$$x^m = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right),$$

то можно дать такое правило:

Чтобы вычислить интеграл как первообразную от степенной функции x^m, надо показатель ее увеличить на единицу и полученную функцию разделить на новый показатель.

Заметим, что это правило применимо и для тех случаев, когда показатель m отрицательный или дробный. Поэтому мы можем вычислить первообразные и от таких функций, как, например, $x\sqrt{x}$. Замечая, что $x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$, заключаем, что искомой первообразной будет функция

$$\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

а потому, например,

$$\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx=\Big|_{x=0}^{x=1}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}.$$

Если требуется найти первообразную для суммы функций, то ищем первообразную для каждого слагаемого. Так, например, для функции

$$\varphi(x)=ax^p+bx^q$$

первообразной будет служить функция

$$\psi(x)=a\frac{x^{p+1}}{p+1}+b\frac{x^{q+1}}{q+1}.$$

И действительно, нетрудно проверить, что $\psi'(x)=\varphi(x)$. Так, например, чтобы вычислить интеграл

$$K=\int_1^2\left(5x\sqrt{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx,$$

представляем подъинтегральную функцию в такой форме:

$$5x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}};$$

без труда убеждаемся, что функция

$$\psi(x)=2x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$$

будет ее первообразной. Действительно,

$$\psi'(x)=5x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

Поэтому пишем

$$\int_1^2\left(5x\sqrt{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\Big|_{x=1}^{x=2}(2x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{1}{3}})=8\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}-3.$$

Из рассмотренных примеров ясно, что если мы знаем первообразную подъинтегральной функции, то вычисление интеграла не представляет

никаких затруднений. И вообще ясно, что доказанная теорема

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

сводит задачу о вычислении определенных интегралов к задаче о вычислении первообразных, т. е. ко второй задаче интегрального исчисления, к подробному изучению которой мы скоро и приступим. Пока же отметим, что при современном состоянии науки, кроме чрезвычайно редких исключений, мы фактически можем вычислить исключительно только те интегралы, для которых можем вычислить первообразные их подъинтегральных функций. Отсюда ясно, насколько важно найти методы для вычисления первообразных *).

§ 28. Заключение.

Если $\Phi'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

---

*) Прежде чем итти дальше, читателю рекомендуется решить задачи № 38—43.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА.

Хотя к понятию интеграла как предела суммы мы пришли из задачи о квадратуре площади, но по существу понятие интеграла и понятие площади — это два совершенно независимых друг от друга понятия. И действительно, по определению интеграл есть предел суммы, построенной по некоторому вполне определенному закону, и только:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Чтобы понять это определение, необходимо знать, что такое сумма, функция, предел, но совершенно не надо знать не только, что такое площадь, но и вообще можно ничего не знать из геометрии. Вся роль задачи о квадратуре площадей заключалась только в том, что она естественно привела нас к понятию интеграла. Но хотя само по себе понятие интеграла чисто аналитическое, однако его значение очень хорошо изображается значением площади соответствующей трапеции, а также различные свойства его тоже хорошо отображаются в соответствующих свойствах площади. Поэтому при теоретическом изучении свойств интеграла всегда очень полезно геометрически представлять его изображенным площадью трапеции, но так как само понятие интеграла не зависит от понятия площади, то вполне естественно, что раз оно введено, то его можно применять к вычислению не только площадей, но и целого ряда других величин.

В этой главе мы рассмотрим некоторые геометрические приложения понятия интеграла.

§ 29. Объем тела вращения.

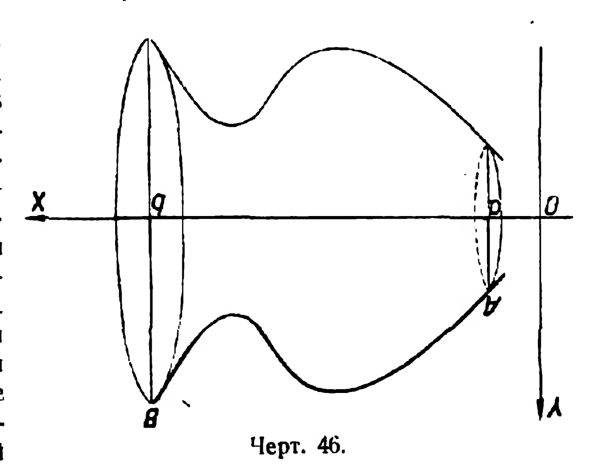
Пусть попрежнему $aABb$ — трапеция, ограниченная сверху кривой $y=f(x)$, лежащей всеми точками выше оси X. Если эта трапеция будет вращаться около оси X, то она при своем вращении опишет тело, которое называется *телом вращения*. Кривая AB при этом опишет некоторую поверхность, которая называется *поверхностью вращения*.

Поставим себе задачу вычислить объем тела, образованного вращением трапеции около оси X. Этот объем обозначим через v.

При вращении трапеции каждая ордината кривой описывает плоскость, перпендикулярную к оси X. Поэтому ясно, что объем v есть объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением кривой AB, и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси X в точках a и b.

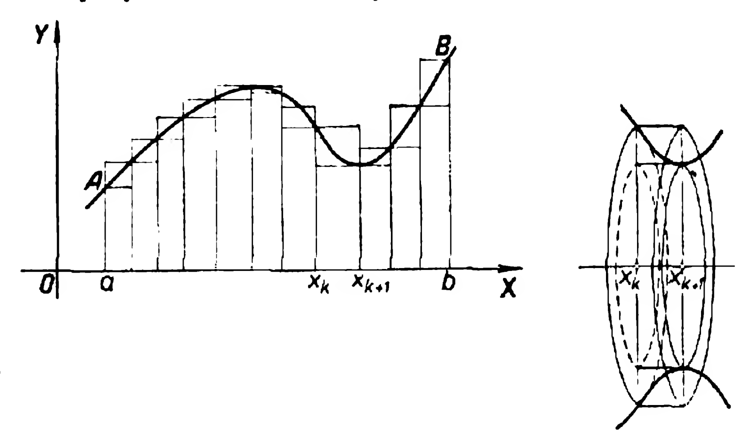
Чтобы вычислить этот объем, поступим так.

Разделив попрежнему трапецию на элементарные полоски и построив прямоугольники как внутренние, так и выступающие, вращаем трапецию около оси X. Тогда вместе с нею вращаются и все прямоугольники. Ясно, что при этом каждый прямоугольник опишет некоторый цилиндр, который назовем элементарным. В зависимости от того, каким прямоугольником, выступающим или внутренним, описан данный элементарный цилиндр, мы будем называть его выступающим или внутренним.



Черт. 46.

Каждая элементарная полоска при вращении тоже опишет некоторое тело, которое назовем элементарным слоем. Каждый такой слой меньше цилиндра, описанного выступающим прямоугольником, принадлежащим той же полоске, но больше цилиндра, описанного соответствующим ей внутренним прямоугольником. Отсюда заключаем, что объем v всего тела вращения меньше суммы объемов всех выступающих цилиндров и больше суммы объемов всех внутренних цилиндров. Поэтому, если через p мы обозначим сумму объемов всех внутренних элементарных цилиндров,



Черт. 47.

а через q — сумму объемов всех выступающих, то будем иметь соотношение

$$p < v < q. \tag{1}$$

Очевиден теперь путь, по которому мы должны итти. Если мы будем бесконечно увеличивать число точек деления x_k *так, чтобы промежутки* между ними бесконечно умалялись, то само собой напрашивается предположение, что суммы p и q внутренних и выступающих цилиндров при

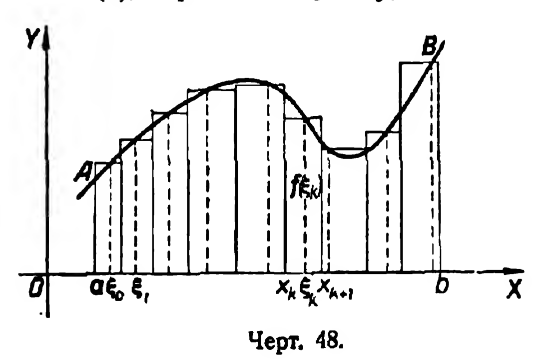
этом будут меняться так, что пределы их будут равны как раз искомому объему v, т. е. напрашивается предположение, что

$$v = \lim p = \lim q. \tag{2}$$

Чтобы это строго доказать, мы должны доказать равенство пределов сумм p и q. Действительно, если мы докажем, что

$$\lim p = \lim q,$$

то из (1), переходя к пределу, мы немедленно получим (2).



Черт. 48.

Но чтобы избежать вычисления пределов двух сумм, суммы p и суммы q, мы рассмотрим одновременно с выступающими и внутренними цилиндрами также и цилиндры общего типа.

Построим для данной трапеции прямоугольники общего типа (черт. 48). Эти прямоугольники при вращении опишут цилиндры общего типа. Вычислим сумму их всех, которую обозначим через S. Объем цилиндра, который опишется прямоугольником, стоящим на интервале (x_k, x_{k+1}), очевидно, равен

$$\pi f(\xi_k)^2 \Delta x_k.$$

Давая индексу k значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим

$$S = \pi f(\xi_0)^2 \Delta x_0 + \pi f(\xi_1)^2 \Delta x_1 + \pi f(\xi_2)^2 \Delta x_2 + \ldots + \pi f(\xi_{n-1})^2 \Delta x_{n-1},$$

или короче

$$S = \sum_a^b \pi f(\xi_k)^2 \Delta x_k. \tag{3}$$

Для ясности обозначим на время

$$\pi f(x)^2 = \psi(x). \tag{4}$$

Тогда (3) перепишется так:

$$S = \sum_a^b \psi(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{5}$$

В правой части стоит интегральная сумма, построенная с помощью функции $\psi(x)$. Поэтому, так как

$$\lim \sum_a^b \psi(x_k)\,dx = \int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx,$$

то из (3), переходя к пределу, заключаем:

$$\lim S = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx. \tag{6}$$

Обозначим интеграл, стоящий в правой части, через K:

$$K=\int_a^b \pi f(x)^2\,dx. \qquad (7)$$

Тогда будем иметь

$$\lim S=K. \qquad (8)$$

Мы нашли предел суммы S. Оказывается, что этот предел остается одним и тем же, как бы мы ни выбирали точки x_k и точки ξ_k. Но суммы p и q объемов внутренних и выступающих цилиндров — это частные случаи суммы S при соответствующем выборе точек ξ_k. Поэтому из (8) следует, что также и

$$\lim p=\lim q=K=\int_a^b \pi f(x)^2\,dx. \qquad (9)$$

Теперь из соотношения (1):

$$p<v<q$$

заключаем, переходя к пределу, что

$$\lim p\leqq v\leqq \lim q,$$

т. е. что

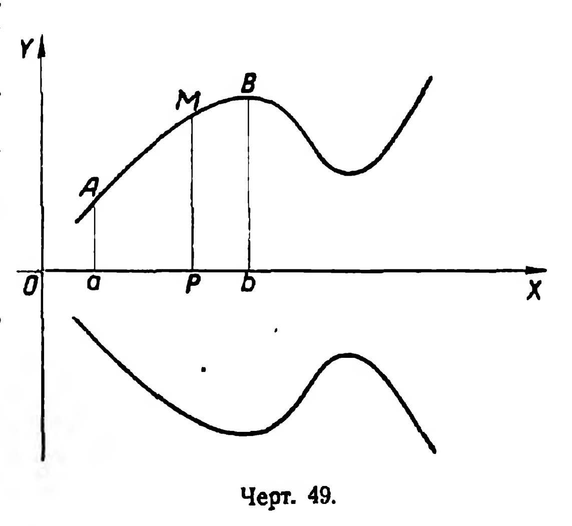
$$v=K=\int_a^b \pi f(x)^2\,dx,$$

или, так как $y=f(x)$,

$$v=\int_a^b \pi y^2\,dx.$$

Теорема. **Объем v тела, ограниченного двумя плоскостями, перпендикулярными к оси X в точках a и b, и поверхностью, образованной вращением кривой $y=f(x)$ около оси X, определяется по формуле:**

$$v=\int_a^b \pi y^2\,dx. \qquad (10)$$



Черт. 49.

Видим, что вычисление объема тела вращения, как и вычисление площади трапеции, приводится к вычислению некоторого определенного интеграла.

Если вместо трапеции $aABb$ мы рассмотрим трапецию $aAMP$, где абсцисса точки M равна x, то ясно, что объем, образованный вращением этой трапеции, будет равен

$$\int_a^x \pi y^2\,dx.$$

Пусть кривая AB монотонная (черт. 50). Тогда ее абсцисса будет однозначная функция ординаты. Пусть

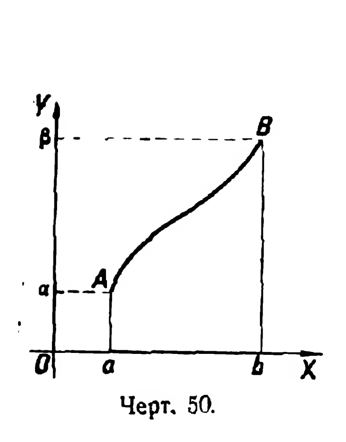
$$x = \varphi(y).$$

Опустив из A и B перпендикуляры $A\alpha$ и $B\beta$ на ось Y, мы получим трапецию $\alpha AB\beta$, основание которой совпадает с осью Y. Очевидно, что для нее x и y меняются своими ролями. Теперь y играет ту роль, которая прежде принадлежала x, и обратно. Поэтому ясно, что площадь трапеции $\alpha AB\beta$ равна

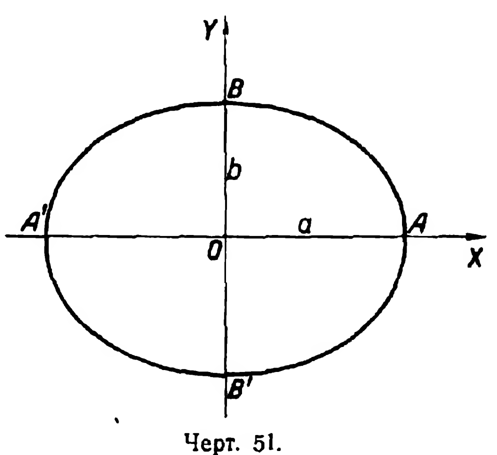
$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} x\,dy,$$

а объем, полученный от ее вращения около оси Y, равен

$$\int_{\alpha}^{\beta} \pi x^2\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \pi\varphi(y)^2\,dy. \tag{11}$$



Черт. 50.



Черт. 51.

Как пример вычислим объем v, образованный вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{12}$$

вокруг оси X (черт. 51). Для верхней его половины

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{13}$$

Поэтому по формуле (10)

$$v = \int_{-a}^{+a} \pi y^2\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\,dx.$$

Первообразной для подъинтегральной функции служит функция

$$\omega(x) = a^2x - \frac{x^3}{3}.$$

И действительно, $\omega'(x)$ равна подъинтегральной функции. Поэтому

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\,dx = \left| \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) dx \right|_{x=-a}^{x=+a} = \frac{4}{3} a^3.$$

Следовательно, объем эллипсоида вращения вокруг большей оси равен $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

При $a = b$ получим как частный случай объем шара.

Вычислим объем v', образованный вращением того же эллипса вокруг малой оси. Теперь роли x и y меняются. Из (12) для правой половины эллипса

$$x = +\frac{a}{b}\sqrt{a^2 - y^2},$$

а потому по формуле (11):

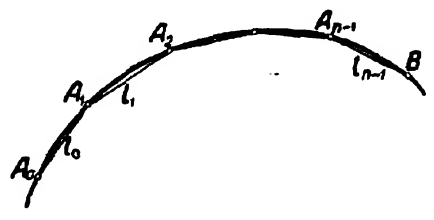
$$v' = \int_{-b}^{+b} \pi x^2\,dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{+b} (a^2 - y^2)\,dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\left|\left(a^2y - \frac{y^3}{3}\right)\right|_{y=-b}^{y=+b} = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Следовательно,

$$v = \frac{4}{3}\pi ab^2, \qquad v' = \frac{4}{3}\pi a^2 b\ ^{*)}.$$

§ 30. Длина дуги.

Хотя с представлением всякой дуги у нас неразрывно связывается и представление о ее длине, однако ввести точное логическое понятие о длине дуги кривой линии далеко не так просто, как это кажется на первый взгляд. Действительно, чтобы найти числовое выражение дуги кривой, надо измерить ее, т. е. сравнить ее с отрезком, принятым за единицу меры. Для этой цели мы должны узнать, сколько и каких частей единицы меры укладывается в данной дуге. Но здесь мы немедленно же встречаемся с одним затруднением. Чтобы измерить отрезок прямой линии, мы накладываем на него отрезок, принятый за единицу меры. Но этот метод наложения неприменим к измерению кривой дуги, потому что всякий отрезок может иметь большее или меньшее число точек, общих с кривой линией, но не может совпадать с нею всеми точками. Следовательно, необходимо искать другие пути, которые давали бы возможность сравнивать дуги с отрезками, не прибегая к методу наложения. Этой цели мы достигнем, если предварительно введем определение дуги кривой так, чтобы оно, совпадая с нашим обычным представлением,



Черт. 52.

*) К этому параграфу задачи 44—47, 87—89, 94.

в то же время заключало в себе возможность сравнения дуги с отрезком. Поступим так.

Пусть A_0B — данная дуга (черт. 52). Между концами ее вставляем в произвольном числе ряд произвольно взятых промежуточных точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. *Соединив их друг с другом хордами, получим некоторую* ломаную линию. Длину ее, которую будем также называть ее периметром, обозначим через P. Хорду, соединяющую точки A_k и A_{k+1}, обозначим через l_k. Следовательно, стороны, или звенья, этой ломаной будут последовательно равны $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$, а потому

$$P = l_0 + l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-2} + l_{n-1},$$

что короче запишем так:

$$P = \sum l_k.$$

Давая индексу k все значения от 0 до $n-1$, мы получим все слагаемые суммы, стоящей в правой части.

В нашем представлении чем гуще лежат промежуточные точки, тем меньше ломаная отличается от дуги. Поэтому вообразим какой-нибудь закон, по которому число промежуточных точек бесконечно возрастает так, что расстояния между ними бесконечно умаляются. Тогда в нашем представлении длина ломаной будет все меньше и меньше отличаться от дуги, а потому введем такое

Определение. **Длиной дуги кривой линии называется предел периметра вписанной в нее ломаной в предположении, что число звеньев этой ломаной бесконечно возрастает так, что сами звенья бесконечно умаляются.**

Против этого определения можно привести следующее возражение. Так как промежуточные точки A_k берутся произвольно и так как число их можно увеличивать по самым разнообразным законам, то возникает вопрос: не будет ли предел периметра ломаной зависеть от того закона, по которому растет число ее звеньев? Пока мы вправе предположить, что, выбирая за вершины ломаной различные точки и увеличивая число их по различным законам, мы будем для предела периметра получать различные значения и если бы в действительности оказалось так, то тогда длине одной и той же дуги мы должны были бы приписывать различные значения. Это нам показало бы, что приведенное определение непригодно, так как всякой дуге мы приписываем единственное вполне определенное значение, и что поэтому надо искать новые определения. Мы увидим, что ответ на этот вопрос получится сам собой при выводе формулы для вычисления длины дуги.

Пусть кривая AB дана уравнением

$$y = f(x),$$

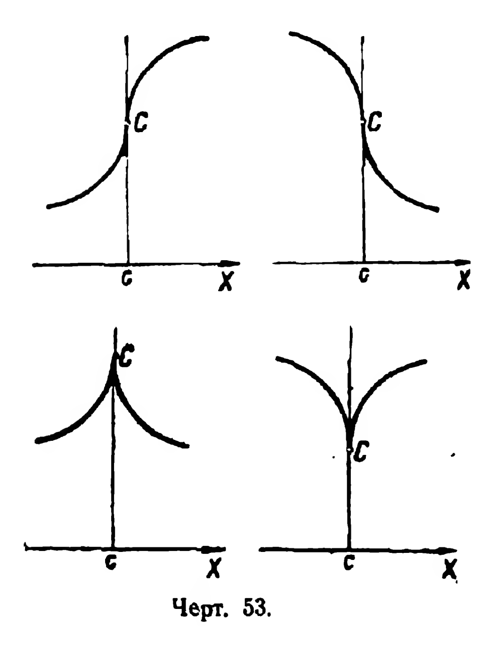
где не только сама функция $f(x)$, но и ее производная непрерывны в некотором интервале (a, b).

Рассмотрим, что значит геометрически требование, чтобы производная была непрерывна. Предположим, что это условие не соблюдено и что производная $f'(x)$ в некоторой точке c бесконечна:

$$f'(c) = \infty.$$

Пусть C — точка на кривой; c — ее абсцисса. Касательная в этой точке перпендикулярна к оси X, а потому нетрудно убедиться, что кривая в области точки C имеет одну из форм чертежа 53, т. е. что точка C есть или точка перегиба, или точка возврата с касательной, перпендикулярной к оси X. Итак,

требование, чтобы производная $f'(x)$ функции $f(x)$ была непрерывна, равносильно требованию, чтобы кривая $y=f(x)$ не имела ни точек перегиба, ни точек возврата с касательными, перпендикулярными к оси X.



Черт. 53.

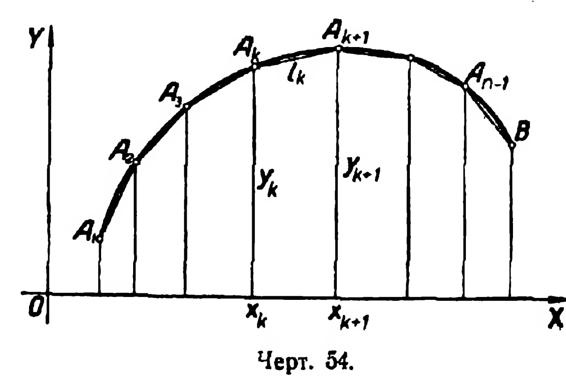
После всех этих предварительных замечаний перейдем к выводу формулы для вычисления дуги кривой $y=f(x)$, где $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на интервале (a, b). Мы легко ее получим, если точно будем итти по тому пути, который нам подсказывается данным определением длины дуги.

Координаты точек

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$$

обозначим через

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}).$$



Черт. 54.

Хорды, соединяющие их, пусть попрежнему

$$l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$$

и пусть P — периметр вписанной ломаной:

$$P = \sum l_k. \tag{1}$$

Вычислим длину хорды l_k (черт. 54). По формуле для расстояния между двумя точками имеем:

$$l_k = \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + (y_{k+1}-y_k)^2} = \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

Но по теореме Лагранжа

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k),$$

где ξ_k — число, промежуточное между x_k и x_{k+1}, а потому

$$l_k = \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Давая индексу k различные значения, будем иметь:

$$l_1 = \sqrt{1 + f'(\xi_1)^2}\,\Delta x_1, \quad l_2 = \sqrt{1 + f'(\xi_2)^2}\,\Delta x_2, \ldots$$

и т. д. Теперь согласно (1)

$$P = \sum_a^b \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k. \tag{3}$$

Введем для ясности обозначение:

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \Phi(x). \tag{4}$$

Тогда (3) перепишется в такой простой форме:

$$P = \sum_a^b \Phi(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{5}$$

В правой части стоит интегральная сумма, составленная для интервала (a, b) с помощью функции $\Phi(x)$. Если мы теперь предположим, что не только данная функция $f(x)$, но и ее производная непрерывны, тогда в (5) мы имеем интегральную сумму от непрерывной функции $\Phi(x)$, а потому, переходя к пределу, получаем

$$\lim P = \int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx. \tag{6}$$

Мы видим, что предел периметра P не зависит от выбора точек x_k, а потому и от выбора точек A_k. Получается

***Теорема.* Если звенья ломаной, вписанной в данную дугу, бесконечно умаляются, то ее периметр стремится к некоторому единственному пределу, который остается одним и тем же при всяком законе бесконечного умаления звеньев ломаной.**

Строго говоря, только доказав эту теорему, мы вправе определить длину дуги как предел периметра вписанной в нее ломаной. Тогда, обозначая длину дуги AB так: $\breve{AB}$, из (6) получаем:

$$\breve{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

***Теорема.* Длина дуги кривой**

$$y = f(x),$$

концами которой служат точки с абсциссами a и b, определяется по формуле:

$$\breve{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx \tag{7}$$

при условии, что $a < b$ и что производная y' непрерывна в интервале (a, b).

Мы видим, что вычисление дуги кривой приводится к вычислению некоторого интеграла.

Если мы на кривой возьмем точку M с абсциссой x (черт. 55), то длина дуги AM определится, очевидно, по формуле

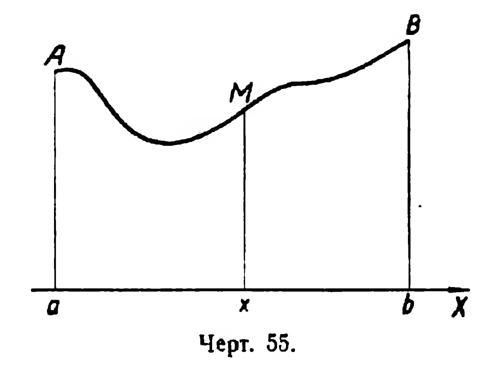
$$\breve{AM}=\int_a^x \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Как пример рассмотрим кривую

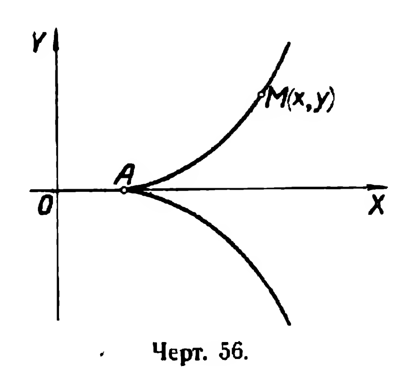
$$y^2=\frac{4}{9}(x-1)^3.$$

Точка A с координатами $(1, 0)$ служит точкой возврата. Сама кривая состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси X *). На верхней ветви, для которой

$$y=+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}, \quad y'=(x-1)^{\frac{1}{2}},$$



Черт. 55.



Черт. 56.

возьмем точку $M(x, y)$ и вычислим дугу AM. По формуле (7) имеем:

$$\breve{AM}=\int_1^x \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_1^x \sqrt{x}\,dx=\Big|_{x=1}^{x=x}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},$$

и окончательно

$$\breve{AM}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}.$$

§ 31. Поверхность вращения.

Мы доказали, что объем тела вращения выражается интегралом. Докажем, что площадь поверхности вращения тоже может быть выражена некоторым интегралом. Для этого мы предварительно докажем, что длину дуги можно рассматривать не только как предел периметра вписанной

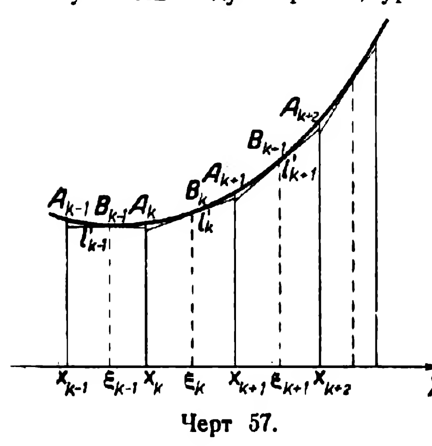
---

*) Это становится очевидным, если перенести начало в точку A. Тогда уравнение кривой примет вид:

$$y^2=\frac{4}{9}x^3, \quad y=\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

в нее ломаной, но также как предел периметра некоторой описанной около нее *прерывной* ломаной линии.

Пусть AB — дуга кривой, уравнение которой



Черт 57.

$$y = f(x),$$

где функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной в интервале (a, b).

Попрежнему произвольно взятыми точками x_k делим интервал (a, b) на подъинтервалы и в каждом подъинтервале (x_k, x_{k+1}) берем, пока тоже произвольно, точку ξ_k (черт. 57). Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ — точки на кривой с абсциссами $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$. Через $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ обозначим точки с абсциссами $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$.

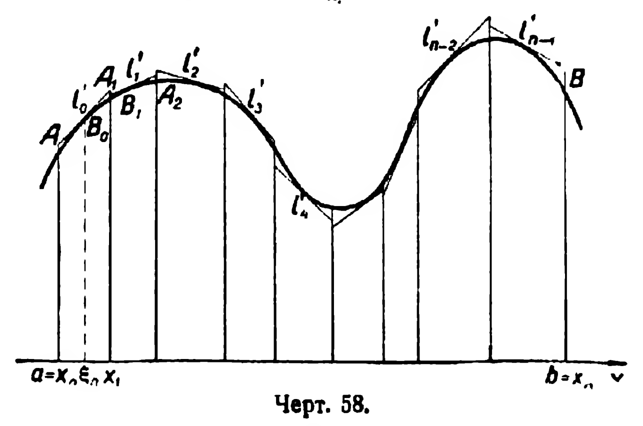
В каждой точке B_k проводим касательную к кривой. Ее отрезок между ординатами точек A_k и A_{k+1} обозначим через l'_k. Построив такие отрезки, касательные к кривой во всех точках B_k, получим систему отрезков

$$l'_0, l'_1, l'_2, \ldots, l'_{n-1}.$$

Так как каждый из них касается кривой, но в то же время, как правило, конец его не совпадает с началом следующего (черт. 58), то мы условимся совокупность их всех называть *прерывной* ломаной, описанной около кривой. Сумму же их назовем периметром этой ломаной и обозначим его через P':

$$P' = l'_0 + l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_{n-1}.$$

***Теорема*. Предел периметра прерывной ломаной, описанной около дуги, равен длине дуги.**



Черт. 58.

Чтобы доказать эту теорему, мы вычислим длину каждого отрезка l'_k, затем возьмем сумму их P' и найдем, чему равен ее предел.

Обозначим через α_k угол отрезка l'_k с осью X. Этот угол есть угол наклона касательной в точке B_k, а потому

$$\operatorname{tg} \alpha_k = f'(\xi_k).$$

При этом возможны два случая: угол α_k может быть или острый, или тупой. Если он острый, то (черт. 59, I)

$$\Delta x_k = l'_k \cos \alpha_k. \qquad (1)$$

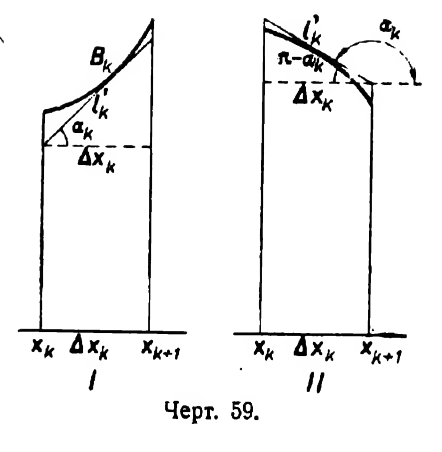
Если же он тупой, то (черт. 59, II)

$$\Delta x_k = l'_k \cos(\pi - \alpha_k) = -l'_k \cos \alpha_k.$$

Следовательно, всегда

$$l'_k = \frac{\Delta x_k}{|\cos \alpha_k|}$$

и так как



Черт. 59.

$$\cos \alpha_k = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_k}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}},$$

то окончательно

$$l'_k = +\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Теперь имеем:

$$P' = \sum_a^b l'_k = \sum_a^b \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k.$$

В правой части стоит интегральная сумма от функции $\sqrt{1+f'(x)^2}$, а потому

$$\lim P' = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Вспомнив теперь, что по доказанному

$$\breve{AB} = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

заключаем, что

$$\lim P' = \breve{AB},$$

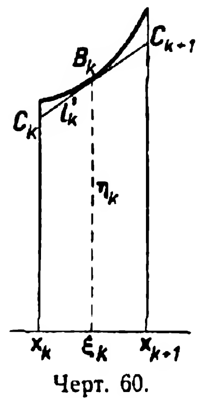
и теорема доказана.

Таким образом, чем гуще и ближе друг к другу лежат точки A_k, тем меньше длина ломаной P' отличается от дуги AB.

Когда трапеция $aABb$ вращается около оси X, то вместе с нею вращается и ломаная P'. При этом всякий отрезок l'_k также описывает некоторую поверхность, а именно, как нетрудно видеть, поверхность усеченного конуса. Следовательно, вся ломаная P' опишет некоторую систему поверхностей усеченных конусов. Эту систему назовем поверхностью, описанной ломаной линией P'. Она не будет непрерывной поверхностью, но прерывной.

Мы условимся принимать за площадь поверхности вращения, описанной дугой AB, предел площади

поверхности, описываемой вращением прерывной ломаной P', т. е. предел суммы площадей поверхностей, описанных каждым из отрезков l'_0, $l'_1, \ldots, l'_{n-1}$ при вращении их около оси X. Но при этом всякую точку ξ_k не будем брать, как до сих пор, произвольно, но возьмем ее как раз посредине отрезка (x_k, x_{k+1}).



Черт. 60.

Мы сейчас увидим, почему ее выгодно так взять.

Обозначим через p_k площадь той поверхности, которую опишет отрезок l'_k при своем вращении около оси X, через η_k — ординату точки B_k (черт. 60). Ясно, что

$$\eta_k = f(\xi_k),$$

и так как точка ξ_k взята как раз в середине отрезка $x_k x_{k+1}$, то

$$\eta_k = \frac{x_k C_k + x_{k+1} C_{k+1}}{2}. \tag{3}$$

Очевидно, что при своем вращении отрезок l'_k опишет поверхность усеченного конуса, образующая коего l'_k, а радиусами нижнего и верхнего оснований служат ординаты точек C_k и C_{k+1}, а потому по известной формуле

$$p_k = \pi l'_k (x_k C_k + x_{k+1} C_{k+1}) = 2\pi \eta_k l'_k.$$

Принимая во внимание (2), имеем

$$p_k = 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k.$$

Каждый из отрезков l'_k опишет свою поверхность усеченного конуса p_k. Взяв сумму их всех, имеем

$$\sum p_k = \sum_a^b 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k.$$

В правой части стоит интегральная сумма, составленная с помощью функции $2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}$. Поэтому, переходя к пределу, получим:

$$\lim \sum p_k = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Так как левая часть по определению есть искомая площадь поверхности вращения, то

Теорема. **Площадь S поверхности вращения около оси X кривой $y = f(x)$ определяется по формуле**

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{4}$$

Мы видим, что и в этом случае мы опять встречаемся с определенным интегралом.

Как пример рассмотрим площадь поверхности, образованной вращением около оси X дуги AB окружности

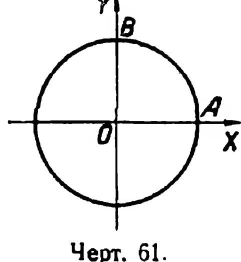
$$x^2+y^2=a^2.$$

Очевидно, что эта поверхность есть половина сферы (черт. 61). Так как для дуги BA

$$y=+\sqrt{a^2-x^2},\quad y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

то

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$



Черт. 61.

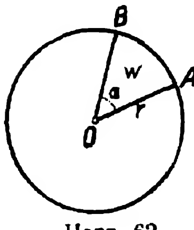
и по формуле (4) имеем:

$$S=\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi a\int_0^a 1\cdot dx=2\pi a^2,$$

и мы получили формулу для поверхности половины сферы радиуса a.

§ 32. Площадь в полярных координатах.

Какими бы кривыми данная площадь ни была ограничена, мы всегда можем разбить ее на сумму нескольких криволинейных трапеций. Поэтому, умея вычислять площади таких трапеций, рассуждая теоретически, мы тем самым можем вычислить и площадь любой фигуры. Но легко видеть, что насколько это справедливо теоретически, настолько это не всегда осуществимо практически, потому что уравнение кривой принимает более или менее простой или сложный вид в зависимости от выбора системы координат, и обычно насколько просто бывает уравнение кривой в какой-нибудь одной вполне определенной системе координат, настолько оно принимает сложную форму в другой системе. Между прочим, многие кривые, уравнения которых чрезвычайно просты в полярных координатах, в декартовых координатах представляются уравнениями сложной структуры. Естественно поэтому поставить задачу: найти формулу для вычисления площадей, ограниченных кривыми, уравнения которых даны в полярных координатах.



Черт. 62.

Когда кривая отнесена к декартовым координатам, то криволинейная трапеция естественно является основным типом, к которому приводятся все остальные типы. Но в системе полярных координат целесообразнее принять за основной тип кривой сектор.

Пусть w — площадь сектора AOB круга радиуса r (черт. 62). Через s обозначим длину дуги AB, через α — угол сектора, измеренный радианом. Ясно, что s во столько раз меньше длины всей окружности, во сколько α меньше 2π. Также очевидно, что отношение площади сектора к площади круга равно отношению угла сектора к полному углу. Следовательно, имеем:

$$\frac{s}{2\pi r}=\frac{\alpha}{2\pi},\quad \frac{w}{\pi r^2}=\frac{\alpha}{2\pi},$$

а потому

$$s = r\alpha, \quad w = \frac{1}{2} r^2 \alpha. \tag{1}$$

Эти формулы показывают, что

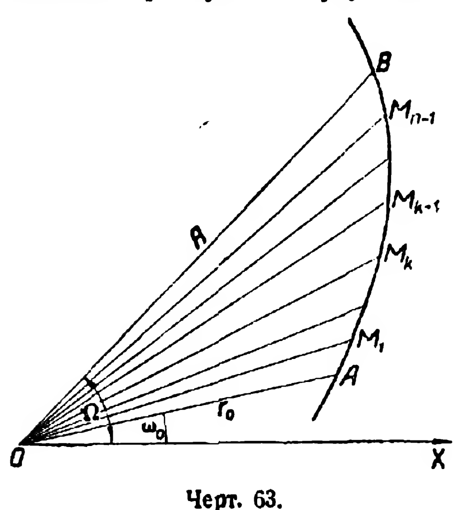
длина дуги окружности равна произведению радиуса на угол, стягиваемый дугой;

площадь кругового сектора равна половине произведения квадрата радиуса на угол сектора.

Из (1) нетрудно вывести, что

$$w = \frac{1}{2} rs. \tag{2}$$

Следовательно, **площадь кругового сектора равна половине произведения радиуса на дугу сектора, а потому с точки зрения вычисления площади круговой сектор можно рассматривать как треугольник, высотой которого служит радиус, а основанием — дуга сектора.**



Черт. 63.

Перейдем к так называемым кривым секторам.

Пусть в полярных координатах дана кривая AB уравнением

$$r = f(\omega).$$

Фигуру OAB, ограниченную этой кривой и двумя радиус-векторами OA и OB, назовем кривым сектором (черт. 63). Вычислим площадь ее, которую обозначим через w.

Для вычисления этой площади мы поступим совершенно аналогично тому, как поступали при вычислении криволинейной трапеции. Начинаем с того, что между точками A и B вставляем произвольный ряд точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, число которых потом будем бесконечно увеличивать так, чтобы расстояния между ними бесконечно умалялись. Все эти промежуточные точки соединяем прямыми с полюсом O, благодаря чему данная площадь w разобьется на части, которые мы назовем элементарными секториальными полосами. Одновременно с бесконечным возрастанием точек M_k будет бесконечно возрастать и число секториальных полос, причем площади их будут бесконечно умаляться. Предел суммы всех этих элементарных полос дает площадь сектора w.

Пусть (r_0, ω_0) и (R, Ω) — полярные координаты точек A и B. Через

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$$

и

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}$$

обозначим полярные углы и радиус-векторы точек

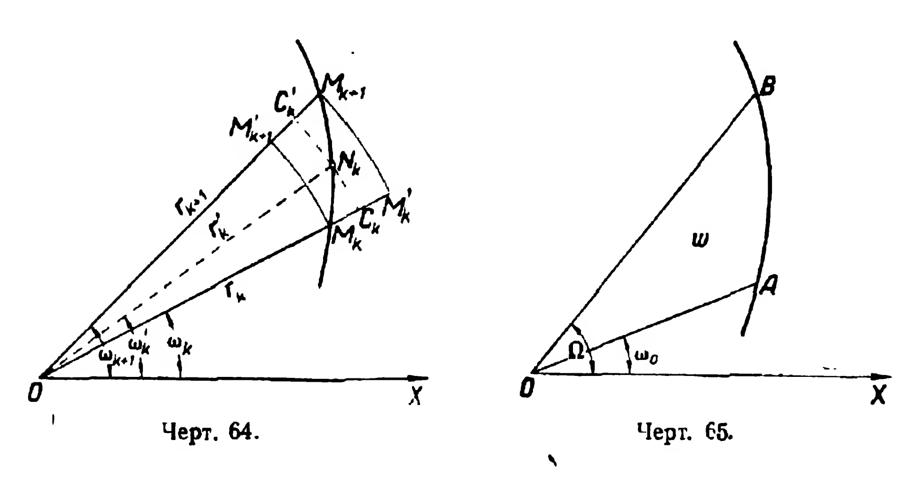
$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}.$$

Следовательно, вообще

$$r_k = f(\omega_k).$$

Рассмотрим секториальную полоску OM_kM_{k+1} (черт. 64). На дуге M_kM_{k+1} возьмем произвольно точку N_k, полярные координаты которой обозначим через r'_k и ω'_k. Опишем радиусом r'_k дугу C'_kC_k. Получим элементарный круговой сектор $OC_kC'_k$ общего типа. Площадь его обозначим через v_k. Ясно, что

$$v_k = \frac{1}{2} r_k'^2 (\omega_{k+1} - \omega_k) = \frac{1}{2} r_k'^2 \Delta\omega_k. \tag{3}$$



Черт. 64. Черт. 65.

В частном случае, если точка N_k совпадает с точкой M_k или M_{k+1}, получим или внутренний круговой сектор, площадь которого обозначим через v'_k, или выступающий, площадь которого обозначим через v''_k. Пусть p' — сумма всех первых площадей, а p'' — сумма всех вторых:

$$p' = \sum v'_k, \quad p'' = \sum v''_k.$$

Площадь w всего сектора заключена между ними:

$$p' < w < p''. \tag{4}$$

Докажем, что при бесконечном возрастании числа точек M_k так, что эти точки бесконечно приближаются друг к другу, всегда

$$\lim p' = \lim p''.$$

Для этого рассмотрим сумму

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = \sum v_k.$$

Согласно (3) имеем:

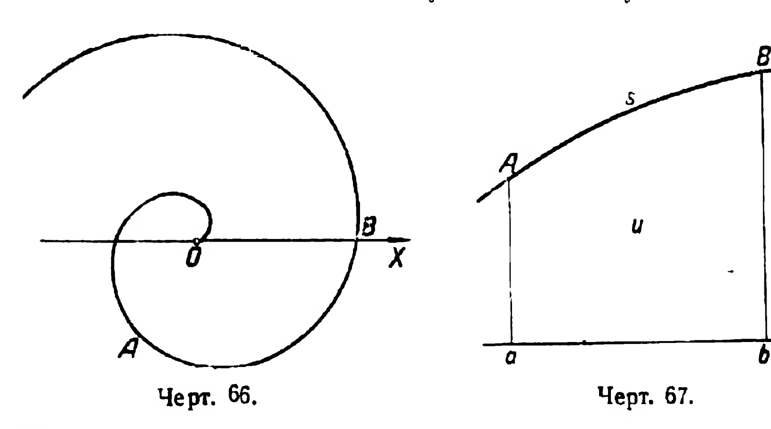
$$S = \sum_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega'_k)\,\Delta\omega_k.$$

В правой части стоит интегральная сумма, составленная с помощью функции $\frac{1}{2}f(\omega)^2$, а потому

$$\lim S = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega)^2 \, d\omega.$$

Мы видим, что сумма S имеет один и тот же предел, как ни брать точки N_k. Следовательно, и суммы p' и p'' имеют тот же предел. Но в таком случае из (4) следует, что

$$\lim w = \lim p' = \lim p'' = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega)^2 \, d\omega = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} r^2 \, d\omega;$$



Черт. 66.

Черт. 67.

отсюда

Теорема. **Площадь w кривого сектора, ограниченного кривой**

$$r = f(\omega)$$

и радиус-векторами $\omega = \omega_0$ и $\omega = \Omega$, определяется по формуле

$$w = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} r^2 d\omega.$$

Рассмотрим архимедову спираль (черт. 66)

$$r = a\omega.$$

Чтобы получить площадь w одного ее завитка OAB, надо менять угол ω от 0 до 2π. Поэтому имеем

$$w = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\omega = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} a^2 \omega^2 \, d\omega = \frac{4\pi^3 a^2}{3}.$$

§ 33. Заключение.

Если u — площадь трапеции $aABb$ (черт. 67), ограниченной кривой $y=f(x)$, и если s, v и S — дуга, объем и поверхность вращения, то

$$u=\int_a^b y\,dx, \quad s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$v=\int_a^b \pi y^2\,dx, \quad S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Площадь кривого сектора в полярных координатах

$$w=\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} r^2\,d\omega.$$

ВТОРАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. ИНТЕГРАЛ КАК ПЕРВООБРАЗНАЯ.

Так как функция может иметь точки прерывности, то, чтобы избежать повторения одного и того же, условимся, что

в дальнейшем всякая данная функция всегда рассматривается только в таком интервале, на котором она непрерывна. Поэтому для сокращения речи мы обычно будем просто говорить о функции, опуская прилагательное „непрерывная".

То же условие относится, конечно, и к производным данных функций, которые, если только явно не указано противное, должны в рассматриваемых интервалах предполагаться непрерывными.

Читателю при изучении этой главы рекомендуется на время как бы забыть все то, что он уже знает об интеграле как пределе суммы.

§ 34. Диференциал и диференциальное выражение.

В дальнейшем нам постоянно придется иметь дело с так называемым основным свойством диференциала.

Если x — независимое переменное, то по определению диференциала

$$df(x)=f'(x)\,\Delta x,$$

а потому $dx=\Delta x$ и

$$df(x)=f'(x)\,dx.$$

Следовательно, диференциал данной функции всегда может быть представлен в виде произведения некоторой функции, а именно производной данной функции на диференциал независимого переменного. Такое представление диференциала назовем *нормальным*.

Основное свойство диференциала заключается в следующем:

Если

$$y=f(x),$$

то равенство

$$dy=f'(x)\,dx \qquad (1)$$

имеет место не только при x независимом, но и при всяком выборе независимого переменного.

Поэтому, если $\varphi(t)$ — какая угодно непрерывная функция и если, рассматривая t как независимое переменное, мы примем $x=\varphi(t)$, в каковом случае и y становится функцией от t, то равенство (1) остается в силе. Заменяя же в нем x через $\varphi(t)$, получим

$$dy=f'(\varphi(t))\,d\varphi(t).$$

Полагая $f'(\varphi(t))=\omega(t)$, будем иметь

$$dy=\omega(t)\,d\varphi(t).$$

В правой части теперь стоит произведение одной функции на диференциал другой. Следовательно,

диференциал функции может представляться не только в виде произведения функции на диференциал независимого переменного, но и в виде произведения одной функции на диференциал другой.

Как раз с таким его представлением часто приходится встречаться в интегральном исчислении. В связи с этим

всякое произведение одной функции на диференциал другой функции, т. е. всякое выражение вида

$$\psi(x)\,d\varphi(x), \tag{2}$$

условимся называть диференциальным выражением.

Строго говоря, диференциальным выражением называется всякое выражение, в которое входят диференциалы, например, такое:

$$\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Но в этой книге под диференциальным выражением мы будем разуметь только выражения типа (2).

В частном случае, если во (2) принять $\psi(x)=1$, то получим $d\varphi(x)$; а если принять $\varphi(x)=x$, то будем иметь $\psi(x)\,dx$. Следовательно, каждое из выражений

$$d\varphi(x),\quad \psi(x)\,dx$$

есть частный случай диференциального выражения.

§ 35. Вторая задача интегрального исчисления.

Второй задачей интегрального исчисления мы назвали задачу о вычислении интеграла как первообразной данной функции.

Интегралом, или первообразной данной функции, называется всякая функция, производная которой равна данной функции.

Следовательно, если u — интеграл функции $f(x)$, то

$$\frac{du}{dx}=f(x), \tag{1}$$

откуда

$$du=f(x)\,dx. \tag{2}$$

Обратно, из этого равенства следует первое. Поэтому задачу интегрального исчисления:

найти функцию, зная ее производную,

можно формулировать и так:

найти функцию, зная ее диференциал.

Вторая формулировка ввиду свойств диференциала имеет преимущество перед первой. Действительно, когда мы ставим задачу: найти функцию u, производная которой равна $f(x)$, и пишем

$$\frac{du}{dx}=f(x), \tag{1}$$

то тем самым неявно уже предполагается, что независимым переменным служит x. Но равенство

$$du = f(x)\,dx \tag{2}$$

остается в силе уже при всяком выборе независимого переменного. Поэтому *оно и имеет преимущество перед равенством* (1).

Принимая же это во внимание, мы окончательно скажем:

Вторая задача интегрального исчисления — найти функцию, зная ее диференциал.

Поэтому же, хотя в дальнейшем мы часто будем ставить задачу так: найти функцию u, производная которой равнялась бы данной функции $f(x)$, но записывать это почти всегда будем так:

$$du = f(x)\,dx.$$

§ 36. Обозначение интеграла.

Обозначение играет в математике большую роль. История учит, что часто удачный выбор обозначения оказывает сильное влияние на прогресс науки. Давно сказано, что хорошо выбранные символы часто думают за нас.

Всякую функцию u, удовлетворяющую уравнению

$$du = f(x)\,dx,$$

т. е. всякий интеграл функции $f(x)$, обозначают так:

$$\int f(x)\,dx,$$

где знак $\int$ называется знаком интеграла. Поэтому данную функцию называют подъинтегральной функцией, произведение же $f(x)\,dx$ называется подъинтегральным выражением.

Это определение только предварительное. Мы скоро будем принуждены несколько видоизменить его и дополнить.

Выражение

$$\int f(x)\,dx$$

точно надо читать так: интеграл от произведения $f(x)$ на dx. Но обыкновенно его короче читают так: интеграл от функции $f(x)$, не упоминая, для сокращения речи, о множителе dx; но

пропускать на письме под знаком интеграла множитель dx нельзя.

Как увидим, такое опущение в некоторых случаях может повести к ошибочным выводам.

Согласно определению, если мы знаем, что

$$\Phi'(x) = f(x),$$

т. е. что $\Phi(x)$ — интеграл от $f(x)$, то мы имеем право написать, что

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x). \tag{1}$$

Отсюда вытекает следующее практическое правило: чтобы вычислить интеграл, надо найти функцию, производная которой равнялась бы подъинтегральной функции.

Найти же эту функцию часто удается очень просто, благодаря тому, что наша память хранит запас производных от целого ряда элементарных функций. Так, например, зная, что $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, мы немедленно же заключаем, что

$$\int \cos x\,dx = +\sin x, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x. \tag{2}$$

Возьмем несколько более сложный случай, на котором ознакомимся с одним очень простым методом вычисления первообразных. Пусть требуется вычислить интеграл

$$A = \int \cos(3x + 7)\,dx. \tag{3}$$

Принимая во внимание (2), можно предположить, что

$$\int \cos(3x + 7)\,dx = \sin(3x + 7). \tag{4}$$

Проверяем это предположение, для чего берем производную от правой части. Так как

$$\frac{d \sin(3x + 7)}{dx} = 3 \cos(3x + 7),$$

то эта производная не равна подъинтегральной функции. Следовательно, предположение (4) не верно. Мы имеем лишний множитель. Но теперь очевидно, что вместо (4) мы должны написать, что

$$\int \cos(3x + 7)\,dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 7).$$

Действительно, взяв производную от правой части, убеждаемся, что она *равна подъинтегральной функции.*

Мы вычислили интеграл (3), предположив сначала равенство (4) и затем, после проверки, исправив первоначальное предположение.

Когда по внешнему виду подъинтегрального выражения сначала делают предположение о форме, в которой может быть представлен искомый интеграл, потом проверяют предположение диференцированием и, в случае нужды исправив его, находят верное выражение интеграла, то говорят, что данный интеграл вычислен методом непосредственного интегрирования.

Как видим, этот метод, в сущности, просто метод более или менее случайной догадки. Как таковой он может употребляться только в очень простых случаях. На практике такие случаи встречаются очень часто.

Задача. Найти методом непосредственного интегрирования следующие интегралы:

$$1)\ \int x^2\,dx; \quad 2)\ \int x^5\,dx; \quad 3)\ \int e^{5x}\,dx; \quad 4)\ \int \frac{dx}{x+2}.$$

Ответы: 1) $\frac{x^3}{3}$; 2) $\frac{x^6}{6}$; 3) $\frac{1}{5}e^{5x}$; 4) $\ln|x + 2|$.

§ 37. Определение пути точки по ее ускорению.

К вычислению интегралов как первообразных приводит бесчисленное множество задач. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть s — прямолинейный путь, пройденный точкой; точнее, s — абсцисса движущейся точки.

Всякая движущаяся точка в каждый момент имеет не только скорость, но и ускорение, которое равно производной от скорости по времени. Поэтому, обозначая скорость и ускорение через v и a, имеем равенства:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt}.$$

Пусть дана задача: вычислить зависимость от времени пути s, проходимого точкой, если известно ускорение точки в каждый момент. Пусть

$$a = \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — данная известная функция. Переписав это равенство в такой форме:

$$\frac{dv}{dt} = \psi(t),$$

имеем

$$dv = \psi(t)\, dt,$$

а потому v — интеграл от функции $\psi(t)$:

$$v = \int \psi(t)\, dt.$$

Предположим, что мы вычислили этот интеграл и нашли, что

$$\int \psi(t)\, dt = \varphi(t).$$

Тогда имеем

$$v = \frac{ds}{dt} = \varphi(t),$$

$$ds = \varphi(t)\, dt,$$

а потому s — интеграл функции $\varphi(t)$:

$$s = \int \varphi(t)\; dt = \int \left\{ \int \psi(t)\; dt \right\} dt.$$

Мы видим, что если ускорение дано как функция времени, то, чтобы вычислить путь s, мы должны вычислить два интеграла: сначала интеграл

$$\int \psi(t)\, dt,$$

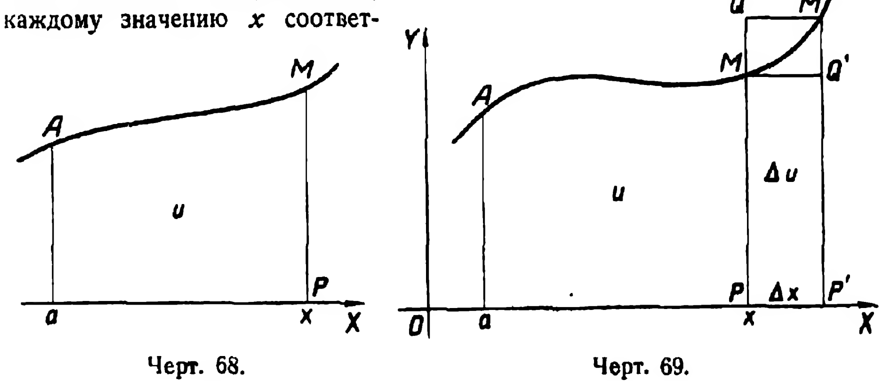
а потом интеграл от этого интеграла.

§ 38. Диференциал площади трапеции.

Задача о квадратуре площади привела нас к понятию интеграла как предела суммы. Но та же задача, рассматриваемая с несколько иной точки зрения, может так же естественно привести к понятию интеграла как первообразной. Рассмотрим ее с этой новой точки зрения.

Пусть $y=f(x)$ — вообще положительная функция, непрерывная в некотором интервале. Она изобразится кривой, лежащей всеми своими точками выше оси X (черт. 68). Выберем на кривой, хотя и произвольно, но раз навсегда неподвижную точку A, абсциссу которой обозначим через a. Ее ординату aA назовем **началом отсчета площадей**. Справа от A отметим переменную точку M с абсциссой x. Опустив перпендикуляр MP на ось X, получим кривую трапецию $aAMP$, площадь которой обозначим через u. Чему равна эта площадь u?

Очевидно, что u — функция x. Действительно, если x увеличивается, то ордината PM движется вправо, а потому u тоже увеличивается. Напротив, если u уменьшается, то x тоже уменьшается и обращается в нуль при $x=a$. Если же мы дадим x какое-нибудь определенное значение, то ордината MP займет вполне определенное положение, а потому u будет иметь вполне определенное значение. Следовательно, каждому значению x соответствует значение для u, а потому u — функция x. Какого вида эта функция, это другой вопрос.



Черт. 68. Черт. 69.

Поставим задачу: вычислить производную от u как функции x.

На первый взгляд может казаться странной постановка такой задачи. Как можно вычислить производную функции, не зная самой функции? Но оказывается, что насколько в большинстве случаев трудно бывает вычислить самую функцию u, настолько легко вычислить ее производную.

Предположим сначала, что ординаты кривой возрастают вправо от M, и дадим x произвольное положительное приращение Δx, которое пусть изобразится отрезком PP' (черт. 69). Ордината MP при этом займет новое положение $M'P'$, а площадь u получит приращение Δu, равное площади полоски $PMM'P'$.

Мы предположим, что Δx взято настолько малым, что функция $f(x)$ справа от точки M монотонно возрастает.

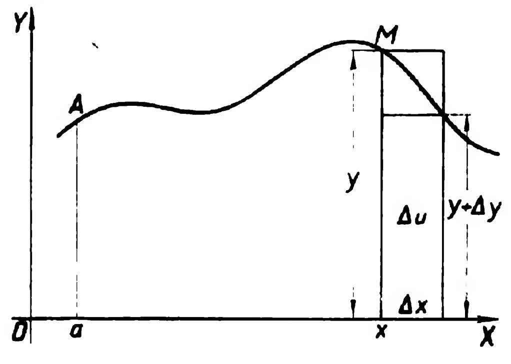
Проведем параллельно оси X прямые MQ' и $M'Q$. Получим два прямоугольника: внутренний $PMQ'P'$ и выступающий $PQM'P'$. Площадь первого равна $y\Delta x$ и она меньше площади полоски Δu. Площадь второго равна $(y+\Delta y)\Delta x$ и она больше Δu. Получаем неравенства

$$y\Delta x < \Delta u < (y+\Delta y)\Delta x.$$

Деля на положительное Δx, имеем:

$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Переходим теперь к пределу, предполагая, что Δx бесконечно умаляется. Так как неравенства при переходе к пределу или сохраняются или обращаются в равенства, то получим



Черт. 70.

$$y \leqq \frac{du}{dx} \leqq y,$$

и так как крайние члены равны, то

$$\frac{du}{dx} = y = f(x). \qquad (1)$$

Мы вычислили производную от u, но вычислили в предположении, что ординаты вправо от M возрастают. Предположим теперь, что они уменьшаются (черт. 70). Легко видеть, что все прежние рассуждения остаются в силе. Несколько изменятся только выражения внутреннего и выступающего прямоугольников, благодаря чему мы будем иметь неравенства

$$(y + \Delta y)\,\Delta x < \Delta u < y\Delta x,$$

откуда

$$y + \Delta y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y,$$

$$y \leqq \frac{du}{dx} \leqq y,$$

и окончательно прежнее равенство (1). Получаем теорему:

Производная от площади кривой трапеции по абсциссе равна ординате:

$$\frac{du}{dx} = y. \qquad (1)$$

Но из (1) следует, что

$$du = y dx = f(x)\,dx, \qquad (2)$$

а потому доказанную теорему можно формулировать и так:

Диференциал площади трапеции равен произведению ординаты на диференциал абсциссы.

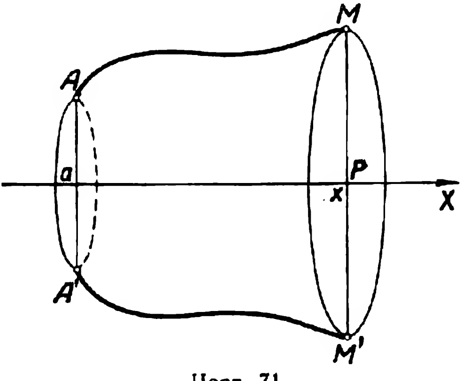
Из (2) следует, что u есть интеграл функции $f(x)$ и что, для того чтобы вычислить площадь, достаточно вычислить этот интеграл. Таким образом, оказывается, что

задача о квадратуре площадей, т. е. задача о вычислении площадей, всегда может быть сведена к задаче о вычислении первообразных данных функций.

Этот результат чрезвычайно важен. Он показывает, что для современной математики задача о квадратуре площади как самостоятельная задача не существует. Она поглощается более широкой задачей о вычислении интегралов как первообразных. Последнюю задачу мы должны признать более широкой потому, что к ней сводится, кроме задачи о квадратуре, бесчисленное множество других задач из области геометрии, физики, механики и вообще из области всех наук, имеющих дело с понятием непрерывного изменения величин.

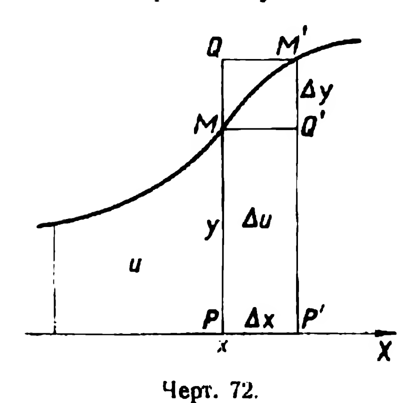
§ 39. Диференциал объема тела вращения.

Пусть попрежнему $aAMP$ — кривая трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$ (черт. 71), и пусть x — абсцисса точки M. Вообразим, что эта трапеция вращается вокруг оси X; объем полученного тела обозначим через v. Ясно, что v — функция x. Вычислим ее производную. Для этого, сохраняя прежние обозначения, даем x положительное приращение Δx и строим внутренний и выступающий прямоугольники. Пусть Δv — соответствующее приращение объема v. Следовательно, Δv есть объем, образованный вращением полоски $PMM'P'$ вокруг оси X (черт. 72).



Черт. 71.

Предполагая сначала, что ординаты кривой вправо от M возрастают, мы (черт. 72) заключаем: при вращении внутренний прямоугольник опишет цилиндр, объем которого равен $\pi y^2 \Delta x$, причем этот объем меньше того, который получится от вращения полоски Δu, т. е. меньше Δv.



Черт. 72.

Выступающий прямоугольник опишет цилиндр, объем которого равен $\pi(y+\Delta y)^2 \Delta x$ и который больше Δv. Поэтому имеем неравенства

$$\pi y^2 \Delta x < \Delta v < \pi (y+\Delta y)^2 \Delta x. \qquad (1)$$

Это в том случае, если ординаты вправо от M возрастают. Если же они убывают, то нетрудно видеть, что (черт. 73) вместо неравенств (1) будем иметь:

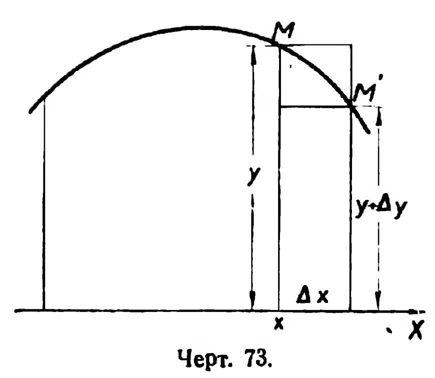
$$\pi y^2 \Delta x > \Delta v > \pi (y+\Delta y)^2 \Delta x. \qquad (2)$$

Деля в том и другом случае на положительное Δx, получим:

$$\pi y^2 < \frac{\Delta v}{\Delta x} < \pi (y+\Delta y)^2, \quad \text{или} \quad \pi y^2 > \frac{\Delta v}{\Delta x} > \pi (y+\Delta y)^2.$$

Пусть теперь Δx бесконечно умаляется. Переход к пределу дает:

$$\pi y^2 \leqq \frac{dv}{dx} \leqq \pi y^2, \quad \text{или} \quad \pi y^2 \geqq \frac{dv}{dx} \geqq \pi y^2.$$



Черт. 73.

Следовательно, в том и другом случае $dv = \pi y^2 dx$.

***Теорема.* Если v — объем, образованный вращением кривой трапеции около оси X, то**

$$dv = \pi y^2 dx.$$

Так как $y = f(x)$, то

$$dv = \pi f(x)^2 \, dx,$$

а потому v — интеграл функции $\pi f(x)^2$. Опять мы видим, что задача о вычислении объема тела вращения приводится к задаче о вычислении интеграла.

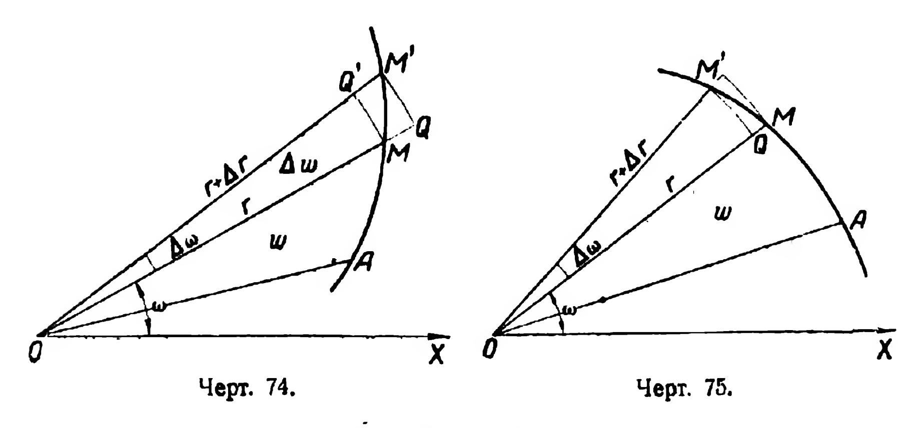
§ 40. Диференциал площади кривого сектора.

На кривой, уравнение которой в полярных координатах

$$r = f(\omega),$$

отметим две точки: неподвижную A и подвижную $M(r, \omega)$ (черт. 74, 75). Площадь кривого сектора AOM обозначим через w и вычислим ее производную.

Даем углу ω положительное приращение $\Delta\omega$, благодаря чему радиус-вектор OM переместится в OM', так что w получит приращение Δw, равное площади кривого сектора $OM'M$.



Черт. 74. Черт. 75.

Опишем дуги окружностей MQ' и $M'Q$ радиусами r и $r + \Delta r$, приняв полюс O за центр; получим обыкновенные круговые секторы. Площадь сектора MOQ' равна $\frac{1}{2} r^2 \Delta\omega$, площадь же сектора $OM'Q$ равна $\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\omega$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2} r^2 \Delta\omega < \Delta w < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\omega, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} r^2 \Delta\omega > \Delta\omega > \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\omega.$$

откуда $\frac{1}{2}r^2 < \frac{\Delta w}{\Delta\omega} < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2$, или $\frac{1}{2}r^2 > \frac{\Delta w}{\Delta\omega} > \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2$.

Переход к пределу дает:

$$\frac{1}{2}r^2 \leqq \frac{dw}{d\omega} \leqq \frac{1}{2}r^2, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}r^2 \geqq \frac{dw}{d\omega} \geqq \frac{1}{2}r^2,$$

т. е. в том и другом случае $\frac{dw}{d\omega} = \frac{1}{2}r^2$, а потому

***Теорема.* Если w — площадь кривого сектора, то**

$$dw = \frac{1}{2}r^2 d\omega.$$

Эта формула известна под названием формулы для площади в полярных координатах. Так как $r = f(\omega)$, то

$$dw = \frac{1}{2}f(\omega)^2\,d\omega.$$

Опять задача о вычислении площади w привелась к задаче о вычислении интеграла от функции $\frac{1}{2}f(\omega)^2$.

§ 41. Существование интеграла.

Лишь только введено понятие интеграла, то естественно возникает вопрос, всякая ли функция имеет интеграл. Из геометрических представлений легко получить ответ на этот вопрос в том случае, когда функция изображается кривой, лежащей в рассматриваемом интервале выше оси X, т. е. когда функция не может принимать отрицательных значений. В этом случае существует площадь u трапеции $aAMP$, где M — точка с абсциссой x. Но мы знаем, что

$$du = f(x)\,dx,$$

а потому u — интеграл. Следовательно, если функция вообще положительна, то она имеет интеграл.

Предположим теперь, что функция на интервале (a, b) может принимать и отрицательные значения, и пусть m — ее наименьшее значение. Тогда при всяком x

$$f(x) \geqq m,$$

а потому функция

$$f(x) - m$$

уже вообще положительна. По доказанному она имеет интеграл. Если его обозначим через $\psi(x)$, то будем иметь

$$\psi'(x) = f(x) - m.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\omega(x) = \psi(x) + mx.$$

Раз $\psi(x)$ существует, то существует и $\omega(x)$. Но ясно, что

$$\omega'(x) = \psi'(x) - m,$$

т. е. что

$$\omega'(x) = f(x).$$

Следовательно, $\omega(x)$ есть интеграл функции $f(x)$. Получаем теорему: **Всякая функция, непрерывная на интервале, имеет интеграл.** В связи с этим докажем следующую теорему:

Всякое диференциальное выражение вида $\varphi(x)\,d\psi(x)$ всегда можно рассматривать как диференциал некоторой функции.

Действительно,

$$\varphi(x)\,d\psi(x) = \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx.$$

Обозначим через $\omega(x)$ первообразную функцию $\varphi(x)\,\psi'(x)$:

$$\omega'(x) = \varphi(x)\,\psi'(x).$$

Такая первообразная, как мы видели, всегда существует. Имеем

$$\varphi(x)\,\psi'(x)\,dx = \omega'(x)\,dx = d\omega(x),$$

и данное выражение представилось как диференциал некоторой функции. Теорема доказана. Вследствие этой теоремы выражения типа

$$\varphi(x)\,d\psi(x)$$

часто называются диференциалами.

§ 42. О числе интегралов.

Мы доказали, что всякая непрерывная функция имеет интеграл. Но теперь возникает вопрос: имеет ли непрерывная функция только один интеграл или она может иметь их несколько?

Пусть $\Phi(x)$ — интеграл данной функции $f(x)$. Следовательно,

$$\Phi'(x) = f(x). \qquad (1)$$

Допустим, что кроме этого интеграла функция $f(x)$ имеет еще другой какой-либо интеграл u. Тогда одновременно с равенством (1) будем иметь также равенство

$$\frac{du}{dx} = f(x). \qquad (2)$$

Следовательно, функции u и $\Phi(x)$ имеют равные производные. Как таковые они могут отличаться друг от друга только на постоянную величину, а потому

$$u = \Phi(x) + C, \qquad (3)$$

где C – некоторое постоянное. Следовательно, *если кроме $\Phi(x)$ существует еще какой-нибудь иной интеграл, то он необходимо вида* (3).

С другой стороны, ясно, что какое бы ни было постоянное C, всякая функция вида (3) необходимо интеграл, потому что из (3) следует (2).

Итак, если $\Phi(x)$ — интеграл, то, прибавляя к нему любое постоянное C, мы получим функцию

$$\Phi(x) + C, \qquad (4)$$

которая будет тоже интеграл.

Но, приписывая в выражении (4) символу C различные постоянные значения, мы будем получать различные функции, например такие:

$$\Phi(x)+1,\quad \Phi(x)+2,\quad \Phi(x)+3,\ \ldots$$
$$\Phi(x)-1,\quad \Phi(x)+e^3,\quad \Phi(x)-\pi,\ \ldots$$

и каждая из них есть интеграл данной функции $f(x)$, потому что производная каждой из них равна $f(x)$. Но таких функций можно написать сколько угодно. Следовательно, всякая функция имеет бесчисленное множество интегралов.

Так, например, $\sin x$ есть интеграл от $\cos x$, потому что

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x.$$

Но и каждая из функций

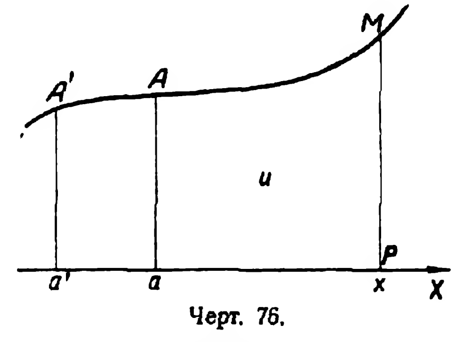
$$\sin x+1,\quad \sin x+\sqrt{2},\quad \sin x-\pi,\ \ldots$$

и вообще всякая функция вида

$$\sin x+a,$$

где a — постоянное, будет тоже интеграл от $\cos x$.

То, что всякая функция имеет бесчисленное множество интегралов, *вполне очевидно геометрически*. Действительно, мы знаем, что площадь u трапеции $aAMP$ есть интеграл (черт. 76). Но, чтобы иметь право говорить о площади u, необходимо сначала выбрать начало отсчета площади, т. е. ординату aA. Если же мы вместо этой ординаты возьмем за начало отсчета другую какую-нибудь ординату $a'A'$ и обозначим через u_1 площадь трапеции $a'A'MP$, то u_1 будет тоже интеграл функции $f(x)$.



Черт. 76.

Так как всякую ординату можно взять за начало отсчета, то очевидно, что всех интегралов бесчисленное множество.

Но хотя их и бесчисленное множество, однако связаны они между собой очень просто. Действительно, если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — два каких-либо интеграла функции $f(x)$, то

$$\varphi'(x)=f(x),\quad \psi'(x)=f(x),$$

а потому

$$\varphi'(x)=\psi'(x)$$

и

$$\psi(x)=\varphi(x)+a, \qquad (5)$$

где a — постоянное. Следовательно, любая пара интегралов может отличаться друг от друга только на постоянную величину, и из равенства (5) следует, что если $\varphi(x)$ — какой-либо интеграл, то всякий другой интеграл $\psi(x)$ может быть получен, прибавляя к первому некоторое постоянное.

Сводя все изложенное, мы можем высказать такое основное положение:

Всякая функция имеет бесчисленное множество интегралов, но любая пара их может отличаться друг от друга только на постоянную величину. Поэтому все интегралы одной и той же функции могут быть получены, прибавляя к одному из них различные постоянные.

Факт, что всякая функция имеет бесчисленное множество интегралов как первообразных, вносит некоторое осложнение в вопрос об их обозначении. В начале главы было указано, что первообразная функции $f(x)$ обозначается так:

$$\int f(x)\,dx. \tag{6}$$

Но теперь, когда мы знаем, что первообразных бесчисленное множество, возникает вопрос: какую же именно первообразную обозначает выражение (6)? *Этот вопрос мы рассмотрим в следующей главе.*

§ 43. Интеграл — предел суммы как первообразная.

Интеграл как предел суммы, если нижний предел его постоянен, а верхний равен аргументу функции, т. е. интеграл типа

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

есть функция своего верхнего предела.

Пусть попрежнему u — площадь трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ и ординатой точки M с абсциссой x. С одной стороны, мы знаем, что площадь u выражается интегралом как пределом суммы, а именно

$$u=\int_a^x f(x)\,dx. \tag{1}$$

С другой стороны, мы доказали, что

$$du=f(x)\,dx. \tag{2}$$

Отсюда следует, что интеграл (1) есть первообразная функция и $f(x)$. Получаем теорему:

Интеграл как предел суммы

$$u=\int_a^x f(x)\,dx,$$

рассматриваемый как функция своего верхнего предела x, есть первообразная подъинтегральной функции.

Заменяя во (2) u его выражением из (1), заключаем:

Диференциал от интеграла как функции верхнего предела равен подъинтегральному выражению:

$$d\int_a^x f(x)\,dx=f(x)\,dx.$$

Следовательно, если

$$\psi(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

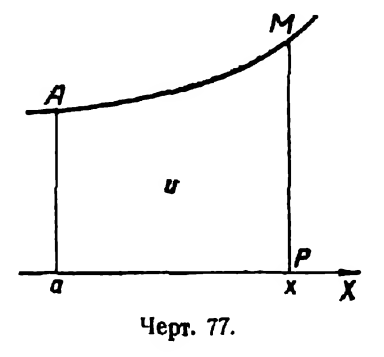
то

$$\psi'(x) = f(x).$$

Таким образом, функция $\psi(x)$ есть одновременно и интеграл как предел суммы, и интеграл как первообразная. Мы видим, что **понятия интеграла как предела суммы и интеграла как первообразной сливаются в одно понятие в том случае, когда интеграл как предел суммы рассматривается как функция своего верхнего предела при постоянном нижнем пределе.**

§ 44. Диференциалы площадей, длин и объемов.

Пусть трапеция $aAMx$, площадь которой — u, вращается около оси X (черт. 77). Объем полученного тела вращения обозначим через v, площадь поверхности вращения — через S, дугу AM — через s. С изменением x все эти величины тоже меняются. Каждая из них есть некоторая функция x.



Черт. 77.

Через w обозначим площадь кривого сектора AOM, где M — точка с полярными координатами (r, ω) (см. черт. 74). С изменением ω меняется и w. Ясно, что w — функция ω.

Мы вывели диференциалы площади и объема *из геометрических соображений* (стр. 86, 87). Теперь те же диференциалы, опираясь на предыдущую теорему, мы можем вывести иначе, зная выражения соответствующих величин через интегралы как пределы сумм.

Мы имеем (стр. 79)

$$v = \int_a^x \pi y^2 dx, \qquad s = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

$$S = \int_a^x 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}dx, \qquad w = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{2} r^2 d\omega.$$

Пользуясь теоремой, что

$$d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

заключаем:

Если площадь u трапеции, объем v тела вращения, площадь S поверхности вращения, дугу s кривой рассматривать как функции

абсциссы x точки данной кривой, а площадь w кривого сектора как функцию полярного угла ω, то

$$du = ydx, \quad ds = \sqrt{1 + y'^2}dx,$$

$$dw = \frac{1}{2} r^2 d\omega, \quad dv = \pi y^2 dx,$$

$$dS = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}dx = 2\pi y ds.$$

Следовательно, каждая из этих величин есть первообразная от соответствующей функции, стоящей в правой части множителем при dx. Вычисление их сводится к вычислению интегралов как первообразных.

§ 45. Заключение.

1. Вторая задача интегрального исчисления может быть формулирована так: найти функцию, зная ее диференциал.

2. Всякая функция имеет бесчисленное множество интегралов, каждая пара которых отличается друг от друга только на некоторое постоянное.

3. Диференциал от интеграла как функции верхнего предела равен подъинтегральному выражению:

$$d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Поэтому если

$$u = \int_a^x f(x)\,dx,$$

то

$$du = f(x)\,dx.$$

4. Диференциалы площади трапеции, дуги, объема и поверхности вращения, рассматриваемых как функции абсциссы точки на кривой, определяются по формулам:

$$du = ydx, \qquad dv = \pi y^2 dx,$$

$$dS = \sqrt{1 + y'^2}dx, \qquad dS = 2\pi y ds.$$

Диференциал площади кривого сектора в полярных координатах определяется по формуле:

$$dw = \frac{1}{2} r^2 d\omega.$$

ИНТЕГРАЛ ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ.

Понятие интеграла как первообразной далеко не так просто, как оно кажется на первый взгляд. Мы будем принуждены различать два рода интегралов: определенные интегралы и неопределенные.

§ 46. Функции вполне и не вполне определенные.

Прилагательные „определенный“ и „неопределенный“ употребляются в самых разнообразных смыслах. Здесь мы рассмотрим тот, который приписывается им в теории интегралов как первообразных.

Назовем неопределенным постоянным всякий символ, который должен обозначать постоянную величину, но значение для которого еще не выбрано, еще не определено.

В связи с этим мы будем различать функции вполне определенные и функции не вполне определенные.

Строго говоря, всякая функция, чтобы иметь право называться функцией, должна быть вполне определенной, т. е. для каждого из значений, возможных для ее аргумента, она должна иметь определенное значение. Но часто функцией называют то, что по существу не должно было бы так называться. Например, $\sin x$ есть функция, а также каждое из выражений

$$\sin x + 1, \quad \sin x + 2, \quad \sin x + 3 \qquad (1)$$

есть функция, но выражение

$$\sin x + C, \qquad (2)$$

где C — неопределенное постоянное, т. е. символ, значение для которого еще не выбрано, по существу не есть функция. Оно становится ею только тогда, когда для C будет выбрано какое-нибудь значение. Однако, часто выражение (2) тоже называют функцией. И вот, чтобы различать, о выражениях какого вида идет речь, мы скажем о выражениях вида (1), что каждое из них есть вполне определенная функция; о выражении же (2) будем говорить, что оно не есть еще вполне определенная функция, что оно — функция, не вполне определенная.

Для целей практического пользования этими терминами можно дать такое простое правило:

Функция называется вполне определенной, если она дается выражением, в котором нет неопределенных постоянных; если же в выражение, которым дается функция, входят неопределенные постоянные, то функция называется не вполне определенной.

Так как в выражение (2) входит неопределенное постоянное, то оно есть не вполне определенная функция.

§ 47. Интеграл определенный и неопределенный.

То, что раньше мы называли просто „первообразной“, или „интегралом“, теперь будем называть „определенной первообразной“, или „определенным интегралом“, а именно:

Определенным интегралом, или определенной первообразной, будем называть всякую вполне определенную функцию, производная которой равна данной функции.

Следовательно, так как

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$$

и так как $\sin x$ — вполне определенная функция, то $\sin x$ есть определенный интеграл от $\cos x$. Точно так же им будет и всякая из функций

$$\sin x+1,\quad \sin x+2,\quad \sin x+3,\ldots$$

и вообще всякая функция

$$\sin x+a,$$

где a — определенное постоянное. Но выражение

$$z=\sin x+C, \tag{1}$$

где C — символ еще неопределенного постоянного, уже не будет вполне определенной функцией. Поэтому, хотя

$$\frac{dz}{dx}=\cos x,$$

т. е. хотя выражение (1) и есть интеграл от $\cos x$, но его нельзя назвать определенным интегралом. Его называют неопределенным интегралом.

Рассмотрим общий случай. Пусть требуется найти функцию, относительно которой известно только то, что она удовлетворяет уравнению

$$du=f(x)\,dx, \tag{2}$$

и больше относительно нее пусть ровно ничего не известно.

Посмотрим, что в таком случае можно утверждать относительно этой функции u.

Предположим, что $\Phi(x)$ — одна из вполне определенных первообразных функций $f(x)$. Следовательно,

$$\Phi'(x)=f(x),$$

а потому

$$\frac{du}{dx}=\frac{d\Phi(x)}{dx},$$

и мы заключаем, что

$$u=\Phi(x)+C, \tag{3}$$

где C — какое-то постоянное. Но чему именно равно это C, мы ничего сказать не можем, пока относительно u мы знаем только то, что оно удовлетворяет уравнению (2). Не можем же ничего сказать именно потому, что из (3) всегда следует (2), какое бы ни было постоянное C.

Таким образом выражение (3) есть интеграл. Но будучи им, оно не есть вполне определенная функция. Оно станет таковой только тогда, когда мы выберем для C какое-нибудь вполне определенное значение. Поэтому пока значение для C не выбрано, пока C остается неопределенным, то выражение (3) естественно называть неопределенным интегралом.

Это выражение (3) состоит из суммы двух слагаемых. Одно из них неопределенное постоянное, другое — функция $\Phi(x)$, производная которой равна данной функции $f(x)$. Эта функция $\Phi(x)$ называется функциональной частью неопределенного интеграла.

Все изложенное дает следующее

***Основное определение.* Неопределенным интегралом данной функции $f(x)$ называется всякое выражение вида**

$$\Phi(x)+C,$$

которое получится, если к какой-нибудь первообразной $\Phi(x)$ данной функции $f(x)$ прибавить неопределенное постоянное. Эта первообразная $\Phi(x)$ называется функциональной частью неопределенного интеграла.

Обозначается неопределенный интеграл так:

$$\int f(x)\,dx.$$

Следовательно, если

$$\Phi'(x)=f(x), \tag{4}$$

то по определению

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x)+C. \tag{5}$$

Опираясь на (4) и (5), можно дать такое

***Практическое правило.* Чтобы вычислить неопределенный интеграл, надо найти какую-нибудь функцию, производная которой равнялась бы подъинтегральной функции, и прибавить к ней неопределенное постоянное.**

Пусть, например, требуется вычислить неопределенный интеграл

$$\int \cos x\,dx.$$

Вспоминая, что $(\sin x)'=\cos x$, пишем

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C.$$

Точно так же, вспоминая, что

$$\frac{d\ln|x|}{dx}=\frac{1}{x}, \quad \frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{dx}=\frac{1}{1+x^2},$$

имеем

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arc\,tg}\,x+C.$$

Под *обозначением*

$$\int f(x)\,dx \tag{6}$$

всегда разумеется *неопределенный интеграл*.

Если интеграл вычислен, то всегда нетрудно проверить, верно ли он вычислен. Пусть, например, дано равенство

$$\int \varphi(x)\,dx = \psi(x) + C$$

и требуется проверить, верно ли оно. Для этого вычисляем производную от $\psi(x)$. Если окажется, что $\psi'(x) = \varphi(x)$, то равенство верно.

Проверим, например, справедливо ли утверждение, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a+x^2}\right| + C. \tag{7}$$

Вычисляем производную от правой части. Имеем

$$\frac{d\ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right|}{dx} = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{a+x^2}}}{x+\sqrt{a+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}.$$

В правой части получили подъинтегральную функцию, следовательно равенство (7) верно.

Интеграл (7) чрезвычайно важен. С ним постоянно приходится встречаться при самых разнообразных исследованиях как теоретического, так и практического характера. Его необходимо запомнить.

Хотя надо резко отличать неопределенный интеграл от определенного, но когда ясно, о каком именно интеграле идет речь, то обыкновенно прилагательные опускают и вместо длинных выражений: „определенный интеграл“, „неопределенный интеграл“ говорят коротко: „интеграл“. Так в дальнейшем часто будем поступать и мы.

§ 48. Различные выражения неопределенного интеграла.

Мы сказали: неопределенный интеграл получается, если прибавить к какому-нибудь определенному интегралу неопределенное постоянное.

Но функция имеет бесчисленное множество определенных интегралов, или первообразных. Поэтому ясно, что, беря различные первообразные и прибавляя к ним неопределенные постоянные, мы будем получать различные выражения для неопределенного интеграла. Так, например, пусть два лица вычисляют интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Прежде всего они должны найти функцию, производная которой была бы равна подъинтегральной функции. И вот один из них вспомнил, что

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

а другой сообразил, что

$$\frac{d(-\arccos x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поэтому первый написал:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,$$

а второй:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+C,$$

и получились два различных выражения для неопределенного интеграла. Легко, однако, видеть, что эти выражения очень просто связаны между собой и легко преобразуются одно в другое. Действительно, рассмотрим общий случай.

Пусть мы каким бы то ни было путем для данной функции $f(x)$ нашли две первообразных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Следовательно,

$$\varphi'(x)=f(x),\quad \psi'(x)=f(x),$$

а потому мы имеем право написать, что

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C \qquad (1)$$

и что

$$\int f(x)\,dx=\psi(x)+C, \qquad (2)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функциональные части. Но так как $\varphi'(x)=\psi'(x)$, то

$$\psi(x)=\varphi(x)+a,$$

где a — некоторое *вполне определенное* постоянное, потому что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две вполне определенные функции. Следовательно:

Если имеем два различных выражения для неопределенного интеграла одной и той же функции, то функциональные части их могут отличаться друг от друга только на некоторую вполне определенную постоянную величину.

Благодаря же этому нетрудно преобразовать их друг в друга. Имеем

$$\int f(x)\,dx=\psi(x)+C=\varphi(x)+a+C. \qquad (3)$$

Полагаем

$$C'=a+C.$$

Так как C произвольно, то C' тоже есть произвольное постоянное; но теперь из (3) имеем:

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C',$$

и мы (2) преобразовали в (1). Так, например, мы только что получили два различных выражения для интеграла одной и той же функции: выражение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

и выражение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

Следовательно, разность между функциональными частями должна быть равна постоянной величине. И действительно, мы знаем, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

а потому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C = \arcsin x - \frac{\pi}{2} + C = \arcsin x + C'.$$

Подобным же образом мы имеем

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

и в то же время

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arc\,ctg} x + C.$$

Это находится в связи с тем, что

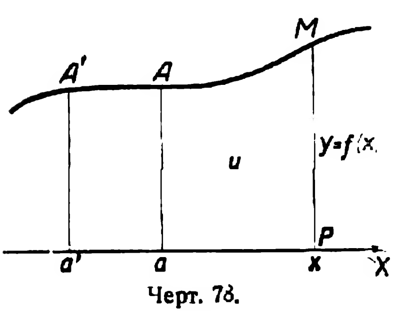
$$\operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,ctg} x + \frac{\pi}{2}.$$

Рекомендуется решить хоть одну из задач: № 1, 2, 3.

§ 49. Геометрическое значение неопределенного интеграла.

Пусть u — площадь трапеции, ограниченной сверху кривой $y=f(x)$, а слева — ординатой aA, принятой за начало отсчета площадей (черт. 78). Мы знаем, что

$$du = f(x)\,dx. \qquad (1)$$



Черт. 78.

Поэтому на первый взгляд может казаться, что задача о вычислении площади равносильна задаче о решении уравнения (1). Однако, стоит только фактически приступить к решению этих двух задач, чтобы немедленно же убедиться, что задача о квадратуре площади и задача о вычислении интеграла

это не две тождественные задачи. Действительно, из (1) следует, что

$$u=\int f(x)\,dx,$$

и если $\Phi'(x)=f(x)$, то

$$u=\Phi(x)+C, \tag{2}$$

где C остается неопределенным постоянным.

Уравнение (1) решено и решено окончательно. Но задача о вычислении площади далеко еще не решена, потому что площадь трапеции есть вполне определенная величина, а выражение (2) содержит неопределенное постоянное. Чтобы вычислить площадь, мы должны еще узнать, каким надо выбрать C.

Но если мы будем пользоваться только одним уравнением (1), то мы не будем в состоянии определить C, потому что u из (2) удовлетворяет уравнению (1), какое бы ни было C.

Ясно поэтому, что площадь u не только удовлетворяет уравнению (1), но и еще какому-то добавочному условию.

Это добавочное условие выявляется из того свойства функции u, что $u=0$ при $x=a$. Поэтому в (2) полагаем $x=a$. Имеем $0=\Phi(a)+C$, откуда

$$C=-\Phi(a), \tag{3}$$

и C определено. Теперь окончательно

$$u=\Phi(x)-\Phi(a), \tag{4}$$

и площадь вычислена.

Но вместо того, чтобы площадь трапеции ограничить слева ординатой aA, мы могли бы ограничить ее другой ординатой $a'A'$ с абсциссой a'. Тогда под u мы должны разуметь уже площадь $a'A'MP$. Для этого u мы попрежнему будем иметь (1) и (2). Но вместо (4) уже будем иметь

$$u=\Phi(x)-\Phi(a').$$

Ясно теперь, что для того чтобы из равенства (3) иметь возможность определить C, мы должны знать, какая ордината принята за начало отсчета. Если же начало отсчета площадей еще не определено, еще не выбрано, то и C остается неопределенным. Поэтому на выражение

$$u=\Phi(x)+C$$

мы можем смотреть как на выражение площади, начало отсчета которой еще не определено. Следовательно,

геометрически неопределенный интеграл можно рассматривать как площадь трапеции, для которой начало отсчета не определено.

В то же время

$$u=\int_a^x f(x)\,dx, \tag{5}$$

где в правой части стоит интеграл как предел суммы. Ясно, что если a вполне определено, то и u определено; если же a не определено, то

и интеграл (5) есть неопределенный интеграл. Но если нижний предел интеграла еще не определен, то его нет нужды и писать. Тогда получается выражение

$$\int^{x} f(x)\,dx,$$

на которое можно смотреть как на обозначение неопределенного интеграла. Опуская и верхний предел, получаем общепринятое обозначение неопределенного интеграла.

§ 50. Интегральные кривые.

Если $\Phi(x)$ — одна из первообразных данной функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C. \tag{1}$$

Давая символу C различные значения, мы будем получать различные определенные интегралы. Так, например, каждая из функций

$$\Phi(x), \quad \Phi(x)+1, \quad \Phi(x)+2, \dots \tag{2}$$

есть определенный интеграл. Но всякая функция геометрически может быть изображена некоторой кривой. Определенный интеграл есть функция, а потому он тоже может быть изображен соответствующей кривой.

Всякая кривая, изображающая какой-нибудь определенный интеграл данной функции, называется интегральной кривой.

Следовательно, каждая из кривых

$$y = \Phi(x), \quad y = \Phi(x)+1, \quad y = \Phi(x)+2, \dots \tag{3}$$

и вообще кривая

$$y = \Phi(x) + a, \tag{4}$$

где a — определенное постоянное, есть интегральная кривая.

Так как определенных интегралов бесчисленное множество, то **интегральных кривых бесчисленное множество; говорят, что они в своей совокупности образуют семейство интегральных кривых.**

Все эти интегральные кривые мы получим, если в равенстве

$$y = \Phi(x) + C \tag{5}$$

будем символу C давать различные постоянные значения. Пока значение для C не *выбрано, уравнение* (5) *не дает нам никакой кривой*. Но так как, давая C всевозможные значения, мы будем получать всевозможные интегральные кривые, то уравнение (5) как бы заключает в себе все интегральные кривые. Поэтому говорят, что оно есть уравнение семейства интегральных кривых.

Переписав (5) в такой форме:

$$y = \int f(x)\,dx, \tag{6}$$

мы видим, что

неопределенный интеграл геометрически изображается семейством интегральных кривых.

Исследуем подробней свойства интегральных кривых. Давая в (5) неопределенному C значение 0, получим интегральную кривую

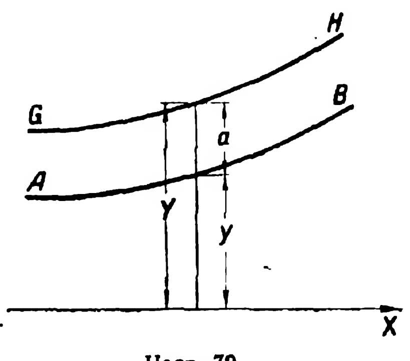
$$y = \Phi(x), \tag{7}$$

которая пусть будет кривая AB *на чертеже* 79.

Давая C какое-нибудь определенное постоянное значение a, получим новую интегральную кривую

$$y = \Phi(x) + a, \tag{8}$$

которая пусть будет кривая GH.



Черт. 79.

Так как приходится одновременно рассматривать две кривые, то для ясности обозначим ординату кривой AB попрежнему через y, а ординату кривой GH — через Y. Имеем

$$y = \Phi(x), \quad Y = \Phi(x) + a,$$

а потому

$$Y = y + a.$$

Следовательно, чтобы получить кривую GH, достаточно передвинуть кривую AB как одно целое так, чтобы каждая точка ее описала путь одной и той же длины a и параллельный оси Y. Такое перемещение кривой называется поступательным вдоль оси Y или параллельным ей. Мы видим:

Всевозможные интегральные кривые можно получить из одной интегральной кривой, перемещая ее поступательно параллельно оси Y.

Вернемся опять к уравнению:

$$y = \Phi(x) + C. \tag{9}$$

Пока C не определено, это — уравнение семейства интегральных кривых. Чтобы получить одну какую-нибудь интегральную кривую, надо выбрать для C некоторое значение. Очень часто выбор этого значения определяют, требуя, чтобы интегральная кривая проходила через заданную точку. Пусть, например, требуется из семейства (9) выделить кривую так, чтобы она проходила через точку (x_1, y_1). Тогда в (9) для C надо выбрать такое значение, чтобы имело место равенство

$$y_1 = \Phi(x_1) + C,$$

откуда

$$C = y_1 - \Phi(x_1).$$

Пусть, например, из семейства кривых

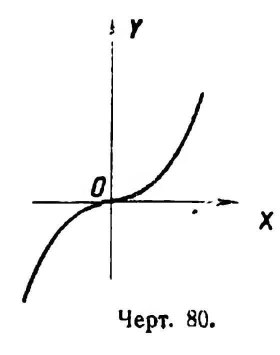
$$y = \int 3x^2\,dx \tag{10}$$

требуется найти кривую, проходящую через точку (2, 1). Из (10) имеем

$$y = x^3 + C. \tag{11}$$

Полагая $C=0$, найдем кубическую параболу $y=x^3$ (черт. 80). Сдвигая ее параллельно оси Y, получим все кривые из семейства.

Полагая в (11) $x=2$, $y=1$, найдем $C=-7$, а потому $y=x^3-7$ — уравнение той кривой из семейства, которая проходит через точку (2, 1).



Черт. 80.

§ 51. О терминах „определенный интеграл" и „неопределенный интеграл".

Подводя итоги, остановимся на понятии определенного и неопределенного интеграла. Мы имеем два типа интеграла. С одной стороны, интегралом называется предел интегральной суммы. Этот интеграл обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

С другой стороны, интегралом называется всякая первообразная, т. е. всякая вполне определенная функция, производная которой равна данной функции. Это — интеграл как первообразная.

Всех первообразных бесчисленное множество. Но каждая пара их отличается друг от друга только на некоторое постоянное. Поэтому, если мы каждую первообразную изобразим кривой, то получим бесчисленное множество интегральных кривых, так называемое семейство интегральных кривых.

Пусть $\Phi(x)$ — одна из первообразных. Тогда все остальные первообразные мы получим, если в выражении

$$\Phi(x)+C, \tag{1}$$

где C — символ неопределенного постоянного, мы будем этому символу C давать различные постоянные значения. Само выражение (1) есть тоже интеграл, но оно не есть вполне определенная функция. Оно становится ею только тогда, когда символу C будет дано некоторое значение. Таким образом оказывается, что интегралами как первообразными могут быть не только вполне определенные функции, но и выражения, содержащие неопределенные постоянные. Чтобы различать два рода этих интегралов, мы всякую вполне определенную функцию, производная которой равна данной функции, условимся называть определенным интегралом, и всякое выражение типа (1) — неопределенным интегралом, который обозначается так:

$$\int f(x)\,dx.$$

Что касается определенных интегралов, то для них само собой получается обозначение, если мы рассмотрим следующий интеграл:

$$u=\int_a^x f(x)\,dx. \tag{2}$$

т. е. интеграл как предел суммы, с постоянным нижним пределом и переменным верхним. Оказывается, что имеет место весьма замечательный факт: u есть первообразная функции $f(x)$:

$$\frac{du}{dx}=f(x), \tag{3}$$

причем такая первообразная, которая обращается в нуль при $x=a$. Поэтому

всякая первообразная, обращающаяся в нуль при $x=a$, естественно обозначается так:

$$\int_a^x f(x)\,dx. \tag{4}$$

В связи с этим отметим следующее очень важное практическое правило:

Если о функции u нам известно только то, что

$$du=f(x)\,dx, \tag{5}$$

тогда мы должны и имеем право написать, что

$$u=\int f(x)\,dx,$$

так как одним уравнением (5) функция u не вполне определяется. Но **если о функции известно не только, что**

$$du=f(x)\,dx,$$

но, кроме того, что $u=0$ при $x=a$, тогда

$$u=\int_a^x f(x)\,dx.$$

Итак, когда речь идет об интегралах как первообразных, то прилагательные „определенный“, „неопределенный“ имеют точный смысл. Но, к сожалению, выражение „определенный интеграл“ часто употребляется в совершенно ином смысле. Исторически сложилось так, что

интеграл как предел суммы, каковы бы ни были его пределы, тоже называется определенным интегралом.

Таким образом, выражение „определенный интеграл“ постоянно употребляется в двух смыслах: его употребляют и для обозначения интеграла как предела суммы и для обозначения интеграла как вполне определенной первообразной. Эти два понятия надо отчетливо различать. Между прочим заметим, что

когда говорят о теории определенных интегралов, то всегда разумеют интегралы как пределы сумм; напротив, — когда говорят о теории неопределенных интегралов, то всегда мыслят под этим теорию интегралов как первообразных.

Можно дать такое практическое правило:

Вошло в обычай то, что обозначено так:

$$\int f(x)\,dx,$$

называть неопределенным интегралом; то же, что обозначено так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

каковы бы ни были a и b, постоянные или переменные, называют определенным интегралом.

Например,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

есть неопределенный интеграл, а

$$\int_a^x \cos x\,dx = \sin x - \sin a$$

есть определенный интеграл, хотя в сущности, если a не определенно, то и этот интеграл есть неопределенный.

В этой главе был изложен целый ряд тонких понятий. Читателю рекомендуется внимательно прочитать и твердо усвоить изложенное в заключении.

§ 52. Заключение.

1. Первообразной, или определенным интегралом, данной функции называется всякая вполне определенная функция, производная которой равна данной функции.

2. Непрерывная функция имеет бесчисленное множество определенных интегралов, или первообразных, отличающихся друг от друга только на постоянные величины. Поэтому все они могут быть получены, прибавляя к одной из них различные постоянные.

3. Интеграл как функция своего верхнего предела есть первообразная подъинтегральной функции. Поэтому если

$$u = \int^x f(x)\,dx,$$

то

$$\frac{du}{dx} = f(x),$$

причем $u = 0$ при $x = a$.

4. **Неопределенным интегралом данной функции $f(x)$, который обозначается так:**

$$\int f(x)\,dx,$$

называется выражение, которое получается, если к какому-нибудь определенному интегралу функции прибавить неопределенное постоянное; поэтому, если $\Phi'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

где функция $\Phi(x)$ называется функциональной частью неопределенного интеграла.

5. Если для неопределенного интеграла имеются два различных выражения, то функциональные части их могут отличаться друг от друга только на вполне определенную постоянную величину. Поэтому если

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C \quad \text{и} \quad \int f(x)\,dx = \psi(x) + C,$$

то $\varphi(x) - \psi(x) = a$, где a — вполне определенное постоянное.

6. Всякое диференциальное выражение $\psi(x)\,d\varphi(x)$ есть диференциал некоторой функции.

7. Если о функции u известно только то, что

$$du = f(x)\,dx,$$

то

$$u = \int f(x)\,dx.$$

Если же, кроме того, известно, что $u = 0$ при $x = a$, то

$$u = \int_a^x f(x)\,dx.$$

ЗАДАЧА ТЕОРИИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Установив понятие об интеграле, перейдем к подробному выяснению задачи теории неопределенных интегралов. Она становится ясной, если мы вычислим интеграл от одной из простейших функций — от степенной.

§ 53. Интеграл от функции $x^m dx$.

Чтобы вычислить этот интеграл, будем рассуждать так.

Мы знаем, что при диференцировании степенной функции показатель понижается на единицу:

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}.$$

Так как интегрирование есть действие, обратное диференцированию то естественно предположить, что при интегрировании степенной функции показатель на единицу повышается. Поэтому предположим, что

$$\int x^m dx = x^{m+1} + C, \tag{1}$$

и проверим, верно ли это предположение. Для этого ищем производную правой части. Имеем

$$\frac{dx^{m+1}}{dx} = (m+1)\,x^m. \tag{2}$$

Мы не получили подъинтегральной функции, потому что в правой части имеем лишний множитель $m+1$. Но деля на него равенство (2), получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m,$$

и теперь в правой части имеем как раз подъинтегральную функцию, а потому

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \tag{3}$$

и интеграл от степенной функции вычислен.

Но заметим, что наши рассуждения справедливы не при всяком m. Нуль не может стоять в знаменателе, а потому равенство (3) имеет

смысл только при условии, что $m \neq -1$. Спрашивается, чему же равен интеграл от степенной функции при $m = -1$, т. е. интеграл

$$\int \frac{dx}{x}.$$

Вспоминая, что

$$\frac{d \ln |x|}{dx} = \frac{1}{x},$$

заключаем, что

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

Следовательно, **интеграл от степенной функции выражается с помощью формул:**

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1, \tag{4}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C. \tag{5}$$

Заметим, что в правой части (5) необходимо писать $|x|$, а не просто x, потому что x может быть и отрицательным.

По той же формуле (4) можно вычислять интегралы и от корня независимого переменного. Для этого достаточно, как и при вычислении производных, заменять корни дробными показателями. Например,

$$\int x \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

Задачи. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^3}$, 2) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$, 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Ответы:

1) $-\frac{1}{2x^2} + C$, 2) $\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$, 3) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C$, 4) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

§ 54. Интегрируемые функции.

Как известно, элементарными функциями называются следующие функции:

1) степенные, показательные и логарифмические:

$$x^m, \ a^x, \ e^x, \ \ln|x|;$$

2) тригонометрические:

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x;$$

3) круговые

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arc\,tg} x,\ \operatorname{arc\,ctg} x,$$

— всего двенадцать элементарных функций.

С помощью этих функций и различных комбинаций из них математика стремится выразить законы зависимостей между теми переменными величинами, с которыми она встречается при своих исследованиях.

Заметив это, рассмотрим внимательно равенство:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Мы видим: *для того чтобы выразить интеграл от такой чрезвычайно простой функции, как функция* $\frac{1}{x}$, *необходимо иметь понятие не только о логарифмической функции, но и о числе e*. Поэтому, если бы мы уже раньше не имели понятия об этой функции, то мы не могли бы вычислить интеграла от $\frac{1}{x}$.

Правда, в настоящее время логарифмы изучаются уже в элементарной алгебре, но изучаются они в ней исключительно только ввиду их большого значения для вычислительной техники. Но без всякого логического ущерба можно было бы, не изучая их, приступить к изучению Анализа. Вполне возможен, например, такой план: изучив основные действия над числами: сложение, вычитание, умножение и деление, не изучая даже действия извлечения корня, мы затем прямо могли бы ввести понятие о переменной величине и функции, установить понятие о пределе и затем ввести понятия производной и интеграла. И вот при таком ходе изложения мы не могли бы вычислить интеграла

$$\int \frac{dx}{x}.$$

Если мы теперь вспомним, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

то опять оказывается, что для того чтобы иметь возможность вычислить интегралы от таких простых алгебраических функций, как функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } \frac{1}{1+x^2},$$

необходимо сначала ввести понятие о таких сравнительно сложных трансцендентных функциях, как функции

$$\arcsin x \text{ и } \operatorname{arc\,tg} x.$$

И вот естественно возникает вопрос: если для выражения таких простых интегралов, как интегралы

$$\int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2},$$

необходимы сравнительно сложные логарифмические и круговые функции, то не потребуется ли для выражения интегралов от других, даже не особо сложных функций, иные незнакомые нам функции. Иначе говоря, возникает вопрос: интеграл от всякой ли функции может быть выражен через комбинации элементарных функций?

При современном состоянии науки на это может быть дан вполне определенный ответ.

Интеграл не от всякой функции, даже сравнительно простой структуры, может быть выражен через элементарные функции и их комбинации в конечном числе.

Так, например, через элементарные функции и их комбинации в конечном числе не могут быть выражены такие интегралы:

$$\int e^{x^2}dx, \quad \int \sin(x^2)\,dx, \quad \int \cos(x^2)\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Поэтому все функции делятся на два обширных класса: на интегрируемые и неинтегрируемые.

Интегрируемыми функциями называются все функции, интегралы которых могут быть выражены через элементарные функции и их комбинации в конечном числе.

Остальные функции называются неинтегрируемыми.

Заметим, что понятие об интегрируемых функциях, как оно здесь определено, употребляется только в теории неопределенных интегралов. В других отделах математики это понятие употребляется в ином смысле.

Обратим так же внимание на то, что выражение „неинтегрируемая функция“ надо понимать не в том смысле, что она не имеет интеграла, а лишь в том, что этот интеграл не может быть представлен через комбинацию элементарных функций в конечном числе. Это не исключает возможности, что интеграл неинтегрируемой функции может быть выражен или через *комбинации* тех же элементарных функций, но в бесконечном их числе, например через ряды, или через новые функции, которые могут быть введены как раз для этой цели.

§ 55. Задача теории неопределенных интегралов.

Если мы теперь примем во внимание, что интеграл не от всякой функции может быть выражен через комбинации в конечном числе элементарных функций, то становится понятной следующая особенность интегрального исчисления сравнительно с диференциальным: в диференциальном исчислении мы имеем ряд теорем и правил, которые дают возможность вычислить производную от всякой данной функции. В интегральном исчислении нет таких теорем и правил, применяя которые мы

могли бы вычислить интеграл от любой функции. И их нет не потому, что *интегральное исчисление менее развито, менее совершенно, чем* диференциальное. Их нет, потому что их и не может быть. Нельзя дать правила для вычисления того, что не может быть вычислено. Поэтому задача интегрального исчисления — *вычислить интеграл данной функции* — заменяется другой: *исследовать, интегралы каких функций могут быть вычислены,* и только для этих интегрируемых функций дать правило вычисления их интегралов.

Тот отдел интегрального исчисления, который занимается решением этой задачи, носит название *„теории неопределенных интегралов"*. Она входит как составная часть в интегральное исчисление.

Но исследовать все интегрируемые функции нет никакой возможности, потому что их бесчисленное множество. Поэтому теория неопределенных интегралов естественно ограничивается тем, что или ищет более или менее обширные классы интегрируемых функций, или рассматривает наиболее типичные интегралы, т. е. такие интегралы, которые замечательны или по своим теоретическим свойствам или тем, что они часто встречаются в различных приложениях Анализа к геометрии, механике и физике.

§ 56. Основные интегралы.

Если мы ставим себе задачу: исследовать, интегралы каких функций могут быть выражены через элементарные функции и их комбинации в конечном числе, то естественно начать наши исследования с того, чтобы рассмотреть те интегралы, которые выражаются только через одну элементарную функцию.

Интегралы, выражающиеся только через одну элементарную функцию, называются основными интегралами.

Таких основных интегралов немного, и их нетрудно найти. Действительно, пусть интеграл

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$$

основной, т. е. выражается через одну элементарную функцию. Следовательно, $\Phi(x)$ — элементарная функция, и так как $f(x) = \Phi'(x)$, то мы видим, что всякий основной интеграл есть интеграл от производной элементарной функции. Поэтому, чтобы получить все основные интегралы, мы должны рассмотреть производные от всех элементарных функций. Сделаем это.

Производные от степенной и логарифмической функций:

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$$

дают нам следующие уже вычисленные нами два основных интеграла:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \qquad m \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Показательные функции, для которых

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a, \quad \frac{de^x}{dx} = e^x,$$

дают основные интегралы

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Так как

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d\,\mathrm{tg}\, x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\,\mathrm{ctg}\, x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

то имеем основные интегралы:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$$

Наконец, так как

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

то имеем два выражения для одного и того же интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

или

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

В дальнейшем обычно мы будем пользоваться первым выражением. Последний основной интеграл мы получим из соотношений:

$$\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\, x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d\,\mathrm{arc\,ctg}\, x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},$$

откуда

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\, x + C,$$

или

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\mathrm{arc\,ctg}\, x + C.$$

С этими основными интегралами необходимо хорошо освоиться, потому что, как увидим, к ним приводится вычисление многих других интегралов.

К числу основных интегралов причисляется также и интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a+x^2}| + C,$$

справедливость которого нами была проверена (стр. 98). Он не выражается через одну элементарную функцию, а через комбинацию их. Поэтому *по существу он не есть основной. Но он так часто встречается в приложениях*, что его относят к основным. Читатель должен его запомнить. Наконец, отметим два интеграла:

$$\int dx = x + C, \qquad \int 0 \cdot dx = C,$$

справедливость которых очевидна.

До сих пор мы предполагали, что основной интеграл выражается через элементарную функцию независимого переменного. Мы брали производную от элементарной функции и от нее переходили к основному интегралу. Например, из того, что

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

мы заключали:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$$

Но очень выгодно построить таблицу основных интегралов, рассматривая элементарные функции не от независимого переменного, а тоже от функции, и беря от них не производные, а диференциалы. Мы знаем, что диференциал обладает тем замечательным свойством, что равенство

$$df(u) = f'(u)\, du \tag{1}$$

справедливо не только при u независимом, но и тогда, когда u, в свою очередь, функция независимого переменного. Но из (1) следует, что

$$\int f'(u)\, du = f(u) + C. \tag{2}$$

И вот, считая u функцией x и заменяя $f(u)$ во (2) последовательно через элементарные функции u^m, e^u, $\ln|u|$, мы получим интегралы:

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \qquad \int e^u du = e^u + C, \qquad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

Заменяя же во (2) $f(u)$ через тригонометрические и круговые функции, получим остальные основные интегралы в несколько обобщенной форме, более удобной для приложений. Таблица их приведена ниже в заключении.

§ 57. Заключение.

1. Интегрируемой функцией называется всякая функция, интеграл которой может быть выражен через комбинации в конечном числе элементарных функций.

2. Основными интегралами называются все те интегралы, которые выражаются через одну элементарную функцию.

3. Таблица основных интегралов, где x — независимое переменное и u — его функция, может быть представлена в двух следующих формах:

1) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$

$m \neq -1;$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int e^x dx = e^x + C;$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

6) $\int \cos x\, dx = +\sin x + C;$

7) $\int \operatorname{tg} x\, dx = +\frac{1}{\cos^2 x} + C;$

8) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = -\frac{1}{\sin^2 x} + C;$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C =$

$= -\operatorname{arc\,ctg} x + C';$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$

$= -\arccos x + C';$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} =$

$= \ln\left|x + \sqrt{a+x^2}\right| + C.$

1') $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C,$

$m \neq -1;$

2') $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3') $\int e^u du = e^u + C;$

4') $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$

5') $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$

6') $\int \cos u\, du = +\sin u + C;$

7') $\int \operatorname{tg} u\, du = +\frac{1}{\cos^2 u} + C;$

8') $\int \operatorname{ctg} u\, du = -\frac{1}{\sin^2 u} + C;$

9') $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C =$

$= -\operatorname{arc\,ctg} u + C';$

10') $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C =$

$= -\arccos u + C';$

11') $\int \frac{du}{\sqrt{a+u^2}} =$

$= \ln\left|u + \sqrt{a+u^2}\right| + C.$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ТЕОРИИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Выяснив задачу теории неопределенных интегралов, перейдем к доказательству ее основных теорем.

В диференциальном исчислении мы имеем следующие теоремы:

1) теорему о выносе постоянного множителя за знак диференциала:

$$d(Au) = Adu;$$

2) теорему о диференциале алгебраической суммы:

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

3) теорему о диференциале функции от функции: если

$$y = f(x), \quad \text{то} \quad dy = f'(x)\,dx$$

при всяком выборе независимого переменного;

4) теорему о диференциале произведения:

$$duv = udv + vdu.$$

Основными теоремами в теории неопределенных интегралов являются теоремы, обратные этим четырем теоремам диференциального исчисления.

§ 58. Основное свойство интеграла.

Если u — функция, относительно которой известно только то, что она удовлетворяет уравнению

$$du = f(x)\,dx, \tag{1}$$

то u есть неопределенный интеграл, который обозначается так:

$$u = \int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Обратно, если дано (2), то это значит, что u удовлетворяет (1). Следовательно, равенства (1) и (2) неразрывно связаны между собой. В них выражается

Основное свойство интеграла. **Если**

$$du = f(x)\,dx, \tag{1}$$

то

$$u = \int f(x)\,dx, \tag{2}$$

и обратно: если

$$u = \int f(x)\,dx,$$

то
$$du = f(x)\,dx.$$

Строго говоря, равенства (1) и (2) выражают одну и ту же математическую идею, но облеченную в различные символические формы.

Заменяя в (1) u его выражением из (2), получаем теорему:

Диференциал от интеграла равен подъинтегральному выражению:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Образно эту теорему можно формулировать так:

Диференциал уничтожает знак интеграла.

Посмотрим теперь, что мы получим, если возьмем интеграл от диференциала функции.

С одной стороны,

$$\int df(x) = \int f'(x)\,dx;$$

с другой стороны, ясно, что

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$

потому что очевидно, что производная от $f(x)$ равна подъинтегральной функции. Следовательно,

$$\int df(x) = f(x) + C,$$

откуда

***Теорема.* Интеграл от диференциала функции равен сумме функции и неопределенного постоянного.**

Образно эту теорему можно формулировать так:

Интеграл, уничтожая знак диференциала, прибавляет к функции произвольное постоянное.

В частном случае имеем

$$\int dx = x + C.$$

§ 59. Теорема о выносе постоянного множителя.

В диференциальном исчислении мы имеем теорему о выносе постоянного множителя за знак диференциала. В интегральном исчислении мы имеем теорему, обратную ей:

Постоянный множитель можно как вносить, так и выносить из-под знака интеграла. Следовательно,

$$\int A\,f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \tag{1}$$

где A — постоянное.

Действительно, пусть

$$u = A\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Имеем

$$du = Ad\int f(x)\,dx.$$

Так как знак диференциала уничтожает знак интеграла, то

$$du = A f(x)\, dx,$$

а потому по основному свойству интеграла

$$u = \int A f(x)\, dx. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), получаем (1). Например,

$$\int 5 \cos x\, dx = 5 \int \cos x\, dx = 5 \sin x + C.$$

§ 60. Интеграл суммы функций.

В диференциальном исчислении мы имеем теорему: диференциал суммы равен сумме диференциалов слагаемых. В интегральном исчислении имеем теорему, обратную ей.

Интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых:

$$\int \{\pm \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\, dx =$$

$$= \pm \int \varphi(x)\, dx \pm \int \psi(x)\, dx \pm \ldots \pm \int \omega(x)\, dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть

$$u = \pm \int \varphi(x)\, dx \pm \int \psi(x)\, dx \pm \ldots \pm \int \omega(x)\, dx. \tag{2}$$

Имеем

$$du = \pm d \int \varphi(x)\, dx \pm d \int \psi(x)\, dx \pm \ldots \pm d \int \omega(x)\, dx,$$

и так как знак диференциала уничтожает знак интеграла, то

$$du = \{\pm \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\, dx,$$

откуда

$$u = \int \{\pm \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\, dx. \tag{3}$$

Сравнивая (3) и (2), получаем теорему.

Эта теорема дает, например, возможность найти интеграл от всякого многочлена. Имеем

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n)\, dx =$$

$$= \int a_0 x^n dx + \int a_1 x^{n-1} dx + \ldots + \int a_{n-1} x\, dx + \int a_n dx =$$

$$= a_0 \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + \ldots + a_{n-1} \int x\, dx + a_n \int dx,$$

и в правой части имеем интегралы от степенных функций. Вычисляя их, находим

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n)\, dx =$$

$$= \frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \frac{a_2 x^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1} x^2}{2} + a_n x + C.$$

Видим, что интеграл от многочлена есть тоже многочлен, но степени на единицу выше.

Относительно этой теоремы необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. В правой части равенства (1) мы имеем n интегралов, а в левой — только один. Но каждый неопределенный интеграл заключает в своем выражении произвольное постоянное. Поэтому в левой части мы имеем только одно произвольное постоянное, а в правой части их n. Каким же образом n произвольных постоянных могут быть заменены *одним?*

Предположим, что мы вычислили все интегралы правой части. Пусть

$$\int \varphi(x)\,dx = \Phi(x) + C_1,$$

$$\int \psi(x)\,dx = F(x) + C_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \omega(x)\,dx = G(x) + C_n.$$

Складывая их, получаем:

$$\int \{\pm\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\,dx =$$

$$= \pm\Phi(x) \pm F(x) \pm \ldots \pm G(x) \pm C_1 \pm C_2 \pm \ldots \pm C_n,$$

или

$$\int \{\pm\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\,dx =$$

$$= \pm\Phi(x) \pm F(x) \pm \ldots \pm G(x) + C,$$

где

$$C = \pm C_1 \pm C_2 \pm \ldots \pm C_n.$$

Так как каждое из постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ может быть взято произвольно, то и сумма их есть произвольное неопределенное постоянное. Ввиду этого при вычислении интеграла суммы вычисляют только функциональные части интегралов от слагаемых и потом к сумме их прибавляют одно неопределенное постоянное. Например, подробно имеем:

$$\int (\cos x + \sin x)\,dx = \int \cos x\,dx + \int \sin x\,dx = \sin x + C_1 - \cos x + C_2$$

и окончательно

$$\int (\cos x + \sin x)\,dx = \sin x - \cos x + C.$$

Рассмотрим еще пример. Пусть требуется вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}.$$

Подъинтегральная функция не дана как сумма. Но ее нетрудно представить в виде суммы. Освобождая знаменатель от радикалов, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}{a}\,dx = \frac{1}{a}\int \sqrt{x+a} - \frac{1}{a}\int \sqrt{x}\,dx,$$

и так как

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1,$$

$$\int \sqrt{x+a}\,dx = \int (x+a)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + C_2,$$

то окончательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\left\{(x+a)\sqrt{x+a} - x\sqrt{x}\right\} + C.$$

В этом примере подъинтегральная функция не дана первоначально как сумма. Чтобы найти интеграл, мы ее разложили на сумму более простых функций.

Когда подъинтегральная функция не дана как сумма функций, но для вычисления интеграла ее разлагают на сумму функций, то говорят, что применяют метод разложения.

Иногда это разложение достигается легко, но часто оно требует предварительных теоретических исследований.

§ 61. Теорема о подстановке.

Теорема о том, что

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

как при x — независимом переменном, так и при x — функции, дает третью теорему интегрального исчисления.

Условимся то переменное, которое в подъинтегральном выражении является независимым, называть переменным интеграции.

Теорема о подстановке или замене переменного интеграции. **Переменное интеграции можно всегда заменить любой непрерывной функцией нового независимого переменного при условии непрерывности как ее самой, так и ее производной.**

Следовательно, если $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны и если $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Пусть

$$u = \int f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Следовательно, u — такая функция x, что

$$du = f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Примем, что $x = \varphi(t)$. Тогда u можно рассматривать как функцию t, причем для u как функции t равенство (3) остается в силе и может быть представлено в форме:

$$du = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt,$$

откуда

$$u = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (4)$$

Сравнивая (2) и (4), получаем (1). Теорема доказана.

Эта теорема — одна из важнейших. Сила ее заключается в том, что очень часто *мы не можем вычислить* интеграл

$$\int f(x)\,dx$$

как функцию x. Но *полагая* $x=\varphi(t)$ *и удачно выбирая функцию* $\varphi(t)$, мы можем получить интеграл

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

который можем вычислить как функцию t. Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx. \qquad (5)$$

Полагая $x=t^3$, последовательно имеем:

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int\frac{(\cos t)\,3t^2dt}{t^2}=3\int\cos t\,dt=3\sin t+C,$$

и мы вычислим интеграл (5) как функцию t. Заменяя t через $\sqrt[3]{x}$, окончательно найдем:

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=3\sin\sqrt[3]{x}+C.$$

Когда при вычислении интеграла пользуются теоремой о подстановке, то говорят, что применяют метод подстановки.

Теорема о подстановке ясно показывает, насколько опасно пропустить в подъинтегральном выражении множитель dx. Действительно, предположим, что вместо

$$\int f(x)\,dx$$

мы случайно написали

$$\int f(x). \qquad (6)$$

Тогда, производя подстановку $x=\varphi(t)$, мы получим интеграл

$$\int f(\varphi(t)) \qquad (7)$$

вместо того, чтобы получить интеграл

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Благодаря тому что в (6) мы опустили множитель dx, мы в (7) потеряли множитель $\varphi'(t)$.

Метод подстановки один из самых сильных методов. Между прочим этим методом был вычислен Эйлером часто встречающийся интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}. \qquad (8)$$

Чтобы найти желаемую подстановку, Эйлер взял уравнение

$$\sqrt{a+x^2}=t-x. \tag{9}$$

Возводя его сначала в квадрат, найдем

$$a+x^2=t^2-2tx+x^2,$$

откуда

$$x=\frac{t^2-a}{2t}. \tag{10}$$

Это и есть искомая подстановка. Заменяя в (9) x из (10), найдем:

$$\sqrt{a+x^2}=\frac{t^2+a}{2t}.$$

Диференцируя (10), имеем:

$$dx=\frac{t^2+a}{2t^2}dt,$$

а потому

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C,$$

и так как из (9)

$$t=x+\sqrt{a+x^2},$$

то окончательно

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\ln|x+\sqrt{a+x^2}|+C. \tag{10}$$

Этот интеграл необходимо запомнить.

§ 62. Теорема об интегрировании по частям.

Эта теорема, между прочим, интересна тем, что она почти не поддается словесной формулировке. Пусть u и v — две функции x. Имеем

$$d(uv)=udv+vdu.$$

Следовательно, uv — интеграл правой части, а потому

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du,$$

откуда

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Это и есть так называемая

***Теорема об интегрировании по частям*. Если u и v — функции, то**

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{1}$$

Пусть читатель попробует формулировать эту теорему словами.

В правой части равенства (1) произведение uv называется проинтегрированной частью.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int \ln x\, dx.$$

Принимаем $u = \ln x$, $v = x$. Имеем

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x\, d \ln x = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C,$$

и интеграл вычислен.

63. Заключение.

1. Основное свойство интеграла. Если

$$du = f(x)\, dx,$$

то

$$u = \int f(x)\, dx,$$

и обратно: если

$$u = \int f(x)\, dx,$$

то

$$du = f(x)\, dx.$$

Отсюда следует, что

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx, \qquad \int df(x) = f(x) + C.$$

2. Основные теоремы:

Теорема о выносе постоянного множителя из-под знака интеграла:

$$\int Af(x)\, dx = A \int f(x)\, dx.$$

Теорема об интеграле суммы:

$$\int \{\pm \varphi(x) \pm \ldots \pm \psi(x)\}\, dx = \pm \int \varphi(x)\, dx \pm \ldots \pm \int \psi(x)\, dx.$$

Теорема о подстановке:

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt, \quad x = \varphi(t).$$

Теорема об интегрировании по частям:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

3. Методом подстановки вычисляется

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a + x^2}| + C.$$

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ К НЕКОТОРЫМ ИНТЕГРАЛАМ.

В теории неопределенных интегралов мы имеем целый ряд методов. Из них к основным обыкновенно относят шесть следующих: 1) метод *непосредственного интегрирования*, 2) *метод разложения*, 3) *метод подстановки*, 4) метод интегрирования по частям, 5) метод приведения и 6) метод сравнения коэфициентов. Четыре первых из них были рассмотрены в предыдущих главах. Два последних будут рассмотрены в этой главе.

Кроме основных, существуют и другие методы. Но *каждый из них* включает в себя как свою составную часть один или несколько основных.

Нельзя ограничиться изучением только одной теории неопределенных интегралов. Необходимо приобрести уменье применять эту теорию к фактическому вычислению интегралов, что может быть достигнуто только практикой, т. е. решением достаточного числа соответствующих задач. *Надо заметить, что в интегральном исчислении роль задач несравненно значительней, чем в диференциальном.* Причина ясна. В диференциальном исчислении мы имеем не такое большое число основных формул и правил, применение которых дает возможность вычислить производную всякой функции. Таких правил, пригодных для всех случаев, в интегральном *исчислении нет и, как мы видели, их и не может быть.* Поэтому вычисление интегралов есть не только наука, но в значительной степени искусство, овладеть которым, конечно, нельзя без соответствующего запаса теоретических знаний.

Ввиду изложенного читателю рекомендуется сначала решить некоторое число задач из первой главы систематического задачника по интегральному исчислению, причем из каждого параграфа, по крайней мере, две-три задачи. *Что касается второй главы, то в ней следует ограничиться пока только параграфом* о методе разложения. После этого можно перейти к изучению этой главы

§ 64. Метод приведения.

Чтобы получить понятие об этом методе, вычислим интеграл

$$u_n = \int \sin^n x\,dx, \tag{1}$$

где n — целое положительное число. Имеем

$$\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx = \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u}\ \underbrace{d(-\cos x)}_{dv}.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int \sin^n x\,dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx.$$

В правой части появился искомый интеграл. Перенося его в левую часть, окончательно получим

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx, \tag{2}$$

или короче

$$u_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} u_{n-2}. \tag{3}$$

Мы получили формулу приведения. В правой части стоит интеграл того же типа, что и в левой, но с показателем, на две единицы меньшим. К нему тоже можно применить ту же формулу (2). Заменяя в ней n через $n-2$, получим

$$\int \sin^{n-2} x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{n-3} x}{n-2} + \frac{n-3}{n-2}\int \sin^{n-4} x\,dx.$$

К интегралу в правой части мы опять можем применить формулу (2) и т. д. При каждом применении мы будем получать интеграл с показателем, на две единицы меньшим, а потому, в зависимости от четности или нечетности показателя n, окончательно придем к интегралу с показателем, равным нулю или единице, т. е. к интегралу

$$\int dx \quad \text{или} \quad \int \sin x\,dx.$$

Так как эти интегралы вычисляются без труда, то тем самым будет вычислен и данный интеграл.

Так, например, по формуле (2) имеем:

$$\int \sin^5 x\,dx = -\frac{\cos x \sin^4 x}{5} + \frac{4}{5}\int \sin^3 x\,dx,$$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{\cos x \sin^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int \sin x\,dx,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

а потому

$$\int \sin^5 x\,dx = -\frac{1}{15}(3\sin^4 x + 4\sin^2 x + 8)\cos x + C.$$

§ 65. Элементарные дроби.

Рациональной функцией называется всякая функция, которая может быть представлена в виде частного двух многочленов.

Из рациональных функций особого внимания заслуживают так называемые элементарные дробные выражения, которые могут быть двух типов.

Элементарной дробью первого типа, или первого рода, называется всякое выражение вида:

$$\frac{A}{px+q}, \quad \frac{B}{(px+q)^2}, \quad \frac{C}{(px+q)^3}, \ldots, \quad \frac{E}{(px+q)^n}, \ldots,$$

т. е. всякое выражение, числителем которого служит постоянная величина, а знаменателем какой-нибудь линейный многочлен или его целая и положительная степень.

Элементарной дробью второго типа называется всякое выражение вида

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^2}, \ldots$$

и вообще выражение вида

$$\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n},$$

где n — целое положительное число, т. е. всякое выражение, числителем которого служит линейный многочлен, а знаменателем квадратный многочлен или его целая и положительная степень.

В частном случае линейный многочлен в числителе при $M=0$ может быть постоянной величиной.

В теории интегрирования рациональных функций элементарные дроби играют большую роль, потому что интегркрование всякой рациональной функции может быть приведено, как увидим, к интегрированию этих дробей.

Найти интеграл от элементарных выражений первого рода нетрудно. Действительно, если $n=1$, то имеем:

$$\int \frac{dx}{px+q} = \frac{1}{p} \ln |px+q| + C,$$

и если $n>1$, то

$$\int \frac{dx}{(px+q)^n} = \frac{1}{p} \int \frac{d(px+q)}{(px+q)^n} = \frac{1}{p} \int \frac{dz}{z^n} = -\frac{1}{p(n-1)\,z^{n-1}} + C =$$
$$= -\frac{1}{p(n-1)} \cdot \frac{1}{(px+q)^{n-1}} + C.$$

Вычисление элементарных дробей второго рода производится, как сейчас увидим, более сложным путем.

§ 66. Квадратный многочлен.

Многочлен второй степени

$$ax^2+bx+c, \qquad (1)$$

который будем короче называть квадратным трехчленом, может иметь все коэфициенты не равными нулю или некоторые из них могут быть равны нулю.

Квадратный многочлен называется многочленом в канонической форме, если его коэфициент при переменном в первой степени равен нулю.

Так, например, многочлен

$$3x^2+7$$

есть многочлен в канонической форме.

Пусть дан какой-нибудь многочлен (1). Полагая

$$x=py+q, \qquad (2)$$

легко найдем, что

$$ax^2+bx+c=(ap^2+bp+c)y^2+(2apq+bp)y+aq^2+bq+c. \qquad (3)$$

В правой части мы будем иметь многочлен в канонической форме, если $2apq+bp=0$, т. е. если

$$q=-\frac{b}{2a}. \qquad (4)$$

Возьмем же во (2) q таковым. Что касается p, то оно пока остается произвольным. Видим, что если

$$x=py-\frac{b}{2a}, \qquad (5)$$

то

$$ax^2+bx+c=Ay^2+C, \qquad (6)$$

где A и C — некоторые постоянные. В точном знании их нам нет нужды. Для нас важно только то, что в правой части нет члена с первой степенью переменного y.

Из (5) имеем:
$$y=\frac{1}{2ap}(2ax+b).$$

Полагая для сокращения письма $k=\frac{1}{2ap}$, получим:

$$y=k(2ax+b). \qquad (7)$$

Оказывается, что если x и y связаны между собой таким равенством, то имеет место равенство (6). Так как до сих пор p можно было брать произвольным, то и k в (7) произвольно. Получается

***Теорема.* Всякий квадратный многочлен**

$$ax^2+bx+c \qquad (8)$$

линейной подстановкой

$$y = k(2ax + b), \qquad (9)$$

где k может быть взято произвольно, преобразуется в многочлен в канонической форме:

$$ax^2 + bx + c = Ay^2 + C. \qquad (10)$$

Конечно, A и C будут зависеть от выбора k. На практике его берем так, чтобы подстановка (9) была по возможности проще.

Нетрудно запомнить эту подстановку: выражение в скобках равно производной данного многочлена (8).

Рассмотрим пример. Пусть дан многочлен:

$$\frac{3}{5}x^2 + 6x - 7.$$

Производная от него равна

$$\frac{6}{5}x + 6 = 6\left(\frac{x}{5} + 1\right).$$

Поэтому, принимая $k = \frac{1}{6}$, берем

$$y = \frac{x}{5} + 1, \text{ откуда } x = 5(y - 1),$$

и легко найдем, что

$$\frac{3}{5}x^2 + 6x - 7 = 15y^2 - 22.$$

В правой части стоит многочлен в канонической форме.

§ 67. Интегралы типа $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}dx$.

Этот интеграл — от элементарной дроби второго рода в том частном случае, когда показатель знаменателя равен единице. Чтобы его вычислить, можно поступать так. Берем какую-нибудь линейную подстановку

$$x = py + q, \qquad (1)$$

которой квадратный многочлен в знаменателе преобразуется в канонический, а именно пусть

$$ax^2 + bx + c = hy^2 + l.$$

Производя эту подстановку, имеем:

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}dx = p\int \frac{Mpy + Mq + N}{hy^2 + l}dy =$$

$$= Mp^2\int \frac{y\,dy}{hy^2 + l} + p(Mq + N)\int \frac{dy}{hy^2 + l}. \qquad (2)$$

Первый интеграл в правой части легко вычисляется. Чтобы числитель равнялся производной от знаменателя, в нем недостает только множителя $2h$, а потому

$$\int \frac{y\,dy}{hy^2+l} = \frac{1}{2h}\int \frac{2hy\,dy}{hy^2+l} = \frac{1}{2h}\ln|hy^2+l| + C. \tag{3}$$

Что касается второго интеграла, т. е. интеграла

$$\int \frac{dy}{hy^2+l}, \tag{4}$$

то в нем можно считать h положительным, потому что, если бы h было отрицательным, то мы взяли бы интеграл с обратным знаком. Итак, пусть $h > 0$.

Если l тоже положительно, то интеграл подстановкой $z = \frac{\sqrt{h}y}{\sqrt{l}}$ легко приводится к основному:

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} z + C.$$

Действительно, имеем:

$$\int \frac{dy}{hy^2+l} = \frac{1}{l}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y\sqrt{h}}{\sqrt{l}}\right)^2} = \frac{\sqrt{l}}{l\sqrt{h}}\int \frac{d\frac{y\sqrt{h}}{\sqrt{l}}}{1+\left(\frac{y\sqrt{h}}{\sqrt{l}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{hl}}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{hl}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y\sqrt{h}}{\sqrt{l}}\right) + C. \tag{5}$$

Если же $l < 0$, то интеграл (4) вычисляем методом разложения. Полагая $l = -l'$, имеем:

$$\int \frac{dy}{hy^2-l'} = \int \frac{dy}{(y\sqrt{h}+\sqrt{l'})(y\sqrt{h}-\sqrt{l'})} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{l'}}\int \frac{(y\sqrt{h}+\sqrt{l'})-(y\sqrt{h}-\sqrt{l'})}{(y\sqrt{h}+\sqrt{l'})(y\sqrt{h}-\sqrt{l'})}dy =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{l'}}\int \left(\frac{1}{y\sqrt{h}-\sqrt{l'}} - \frac{1}{y\sqrt{h}+\sqrt{l'}}\right)dy.$$

Вычисляя интегралы в правой части методом непосредственного интегрирования, найдем, что

$$\int \frac{dy}{hy^2-l'} = \frac{1}{2\sqrt{hl'}}\ln\left|\frac{y\sqrt{h}-\sqrt{l'}}{y\sqrt{h}+\sqrt{l'}}\right| + C. \tag{6}$$

Сводя изложенное, мы видим:

Чтобы вычислить интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx,$$

надо подстановкой типа

$$y=k(2ax+b)$$

свести вычисление его к интегралу типа

$$\int \frac{dy}{hy^2+l},$$

который в зависимости от знаков h и l или приводится к основному

$$\int \frac{dz}{1+z^2},$$

или вычисляется методом разложения.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$H=\int \frac{(2x+5)\,dx}{3x^2+6x-1}.$$

Берем подстановку

$$y=k(6x+6)=6k(x+1).$$

Ясно, что целесообразно взять $k=\frac{1}{6}$. Итак,

$$y=x+1, \quad x=y-1, \quad dx=dy.$$

Имеем

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{3x^2+6x-1}=\int \frac{(2y+3)\,dy}{3y^2-4}=2\int \frac{y\,dy}{3y^2-4}+3\int \frac{dy}{3y^2-4};$$

$$\int \frac{y\,dy}{3y^2-4}=\frac{1}{6}\ln|3y^2-4|+C;$$

$$\int \frac{dy}{3y^2-4}=\frac{1}{4}\int \frac{(\sqrt{3}y+2)-(\sqrt{3}y-2)}{(\sqrt{3}y+2)(\sqrt{3}y-2)}\,dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int \left\{\frac{1}{\sqrt{3}y-2}-\frac{1}{\sqrt{3}y+2}\right\}dy=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{y\sqrt{3}-2}{y\sqrt{3}+2}\right|+C.$$

Окончательно

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{3x^2+6x-1}=\frac{1}{3}\ln|3x^2+6x-1|+\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{3}-2}{x\sqrt{3}+\sqrt{3}+2}\right|+C.$$

§ 68. Интегралы типа $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, $n>1$.

Этот интеграл есть интеграл от элементарной дроби второго рода общего типа. Он вычисляется довольно сложным путем. Мы имеем:

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\{(2ax+b)^2+4ac-b^2)\}.$$

Полагая

$$y=2ax+b, \quad s=4ac-b^2, \tag{1}$$

получим

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}(y^2+s). \tag{2}$$

В правой части стоит многочлен в нормальной форме.

Отметим, что:

1) число s положительно, если корни многочлена мнимы;

2) оно отрицательно, если корни действительны и не равны между собой;

3) оно равно нулю, если корни многочлена равны.

Следовательно, число s может быть любым действительным числом. Для вычисления интеграла

$$G=\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx \tag{3}$$

мы сначала производим подстановку

$$y=2ax+b, \quad x=\frac{y-b}{2a}, \quad dx=\frac{dy}{2a}.$$

Согласно (2) имеем:

$$G=\frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\frac{M}{2a}y-\frac{Mb}{2a}+N}{(y^2+s)^n}dy=$$

$$=\frac{(4a)^{n-1}M}{a}\int \frac{y\,dy}{(y^2+s)^n}+\frac{(4a)^{n-1}}{a}(2aN-Mb)\int \frac{dy}{(y^2+s)^n}, \tag{4}$$

и таким образом вычисление интеграла G сводится к вычислению двух интегралов:

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+s)^n} \quad \text{и} \quad \int \frac{dy}{(y^2+s)^n}. \tag{5}$$

Первый интеграл вычисляется легко. Имеем:

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+s)^n}=\frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+s)}{(y^2+s)^n}=\frac{1}{2}\int z^{-n}dz=$$

$$=\frac{z^{-n+1}}{2(-n+1)}+C=-\frac{1}{(2n-2)(y^2+s)^{n-1}}+C. \tag{6}$$

Второй интеграл вычисляется сложнее. Имеем

$$\int \frac{dy}{(y^2+s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{(y^2+s)-y^2}{(y^2+s)^n} dy =$$

$$= \frac{1}{s} \int \frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s} \int \frac{y^2 dy}{(y^2+s)^n}. \qquad (7)$$

Первый интеграл в правой части того же типа, что и вычисляемый, но с показателем, на единицу меньшим. Для второго имеем:

$$\int \frac{y^2 dy}{(y^2+s)^n} = \int y \frac{y\,dy}{(y^2+s)^n} = -\frac{1}{2n-2} \int y\, d\frac{1}{(y^2+s)^{n-1}}.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int \frac{y^2 dy}{(y^2+s)^n} = -\frac{y}{(2n-2)(y^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}}. \qquad (8)$$

Вставляя в (7), окончательно имеем

$$\int \frac{dy}{(y^2+s)^n} = \frac{y}{s(2n-2)(y^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}}. \qquad (9)$$

Мы получили формулу приведения. С помощью нее интеграл

$$u_n = \int \frac{dy}{(y^2+s)^n} \qquad (10)$$

выражается через интеграл

$$u_{n-1} = \int \frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}}. \qquad (11)$$

В свою очередь u_{n-1} выразится через u_{n-2} и т. д. Вообще эта формула в ряде

$$u_n,\ u_{n-1},\ u_{n-2},\ \ldots,\ u_3,\ u_2,\ u_1$$

дает нам выражение каждого интеграла через следующий за ним. Поэтому мы будем знать u_n, если будем знать u_1. Но

$$u_1 = \int \frac{dy}{y^2+s}.$$

Если $s>0$, то

$$\int \frac{dy}{y^2+s} = \frac{\sqrt{s}}{s} \int \frac{d\frac{y}{\sqrt{s}}}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{\sqrt{s}} + C. \qquad (12)$$

Если $s=0$, то

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C;$$

сли $s<0$, то

$$\int\frac{dy}{y^2+s}=\int\frac{dy}{y^2-(\sqrt{-s})^2}=\int\frac{dy}{(y+\sqrt{-s})(y-\sqrt{-s})}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-s}}\int\left\{\frac{1}{y-\sqrt{-s}}-\frac{1}{y+\sqrt{-s}}\right\}dy=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-s}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{-s}}{y+\sqrt{-s}}\right|+C. \tag{13}$$

Таким образом, интеграл u_1 всегда может быть вычислен, а потому и интеграл u_n. При этом из (12) и (13) следует, что этот интеграл выражается через круговые функции, если $s>0$, и логарифмические,— если $s<0$.

Сводя все изложенное в одно, мы видим, что:

Интеграл

$$G=\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

может быть вычислен так: подстановкой

$$y=2ax+b$$

вычисление его сводится к интегралу типа

$$\int\frac{y\,dy}{(y^2+s)^n}=-\frac{1}{(2n-2)(y^2+s)^{n-1}}+C$$

и к интегралу типа

$$\int\frac{dy}{(y^2+s)^n},$$

который может быть вычислен по формуле приведения:

$$\int\frac{dy}{(y^2+s)^n}=\frac{y}{s(2n-2)(y^2+s)^{n-1}}+\frac{2n-3}{s(2n-2)}\int\frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}}.$$

В зависимости от знака s в выражение интеграла G входят, кроме алгебраических функций, еще или круговые или логарифмические.

§ 69. Интегралы типа $\int\frac{dx}{\sqrt{a\pm bx^2}}$, $b>0$.

Интегралы этого типа на практике постоянно встречаются. В подкоренном количестве b считаем положительным, a может быть любого знака.

Вычисление интеграла

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a\pm bx^2}} \tag{1}$$

в зависимости от того, какой знак перед b, легко приводится к одному из основных:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} \quad \text{или} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Если под корнем имеем знак плюс, то, пользуясь правом вносить и выносить постоянный множитель из-под знака интеграла и затем мысленно делая подстановку $x\sqrt{b}=t$, последовательно имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{d(x\sqrt{b})}{\sqrt{a+(x\sqrt{b})^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dt}{\sqrt{a+t^2}}.$$

В правой части стоит основной интеграл:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a+t^2}} = \ln\left|t+\sqrt{a+t^2}\right| + C,$$

а потому окончательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right| + C. \qquad (2)$$

Если же под корнем перед b стоит знак минус, то, полагая

$$x\sqrt{\frac{b}{a}}=t,$$

последовательно имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{bx^2}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{d\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) + C. \qquad (3)$$

Итак, интегралы типа (1) всегда могут быть вычислены. Легко теперь видеть, что

интеграл типа

$$G = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (4)$$

всегда может быть вычислен.

Для этого сначала ищем подстановку, приводящую подкоренное количество к канонической форме. Пусть если

$$x=py+q, \quad \text{то} \quad ax^2+bx+c=hy^2+s.$$

Теперь имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = p\int \frac{dy}{\sqrt{s+hy^2}}.$$

Интеграл в правой части типа (1). Так как он может быть вычислен, то может быть вычислен и интеграл (4).

Вычислим, например, интеграл

$$H=\int\frac{dx}{\sqrt{4+5x+3x^2}}.$$

Полагая

$$y=6x+5,\quad x=\frac{y-5}{6},\quad dx=\frac{dy}{6},$$

имеем

$$3x^2+5x+4=\frac{1}{12}(y^2+23),$$

а потому

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+5x+3x^2}}=\frac{\sqrt{12}}{6}\int\frac{dy}{\sqrt{23+y^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+2\sqrt{3(3x^2+5x+4)}|+C.$$

§ 70. Интегралы типа $\int\sqrt{a\pm bx^2}\,dx$.

Последовательно имеем, считая $b>0$ и интегрируя по частям:

$$\int\sqrt{a+bx^2}\,dx=x\sqrt{a+bx^2}-\int\frac{bx^2\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}=$$

$$=x\sqrt{a+bx^2}-\int\frac{(a+bx^2)-a}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{a+bx^2}-\int\sqrt{a+bx^2}dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

В правой части опять появился искомый интеграл. Перенося его в левую часть, найдем

$$\int\sqrt{a+bx^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

Зная, чему равен интеграл в правой части (стр. 134), окончательно имеем

$$\int\sqrt{a+bx^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}\ln|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}|+C.$$

Точно так же имеем, интегрируя сначала по частям:

$$\int\sqrt{a-bx^2}\,dx=x\sqrt{a-bx^2}+\int\frac{bx^2\,dx}{\sqrt{a-bx^2}}=$$

$$=x\sqrt{a-bx^2}+\int\frac{a-(a-bx^2)}{\sqrt{a-bx^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a-bx^2}+a\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}-\int\sqrt{a-bx^2}dx,$$

откуда

$$\int \sqrt{a-bx^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a-bx^2}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}},$$

и окончательно (стр. 134)

$$\int \sqrt{a-bx^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a-bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}\arcsin\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+C.$$

§ 71. Интегралы типа $\int \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$

В числителе стоит многочлен, в знаменателе — корень квадратный из квадратного многочлена.

Интегралы этого типа могут быть вычислены так называемым методом сравнения коэфициентов.

Начинаем с того, что простым диференцированием убеждаемся, что

$$dx^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{nax^n+\left(n-\frac{1}{2}\right)bx^{n-1}+(n-1)cx^{n-2}}{\sqrt{a^2+bx+c}}\,dx.$$

Интегрируя это равенство и полагая для сокращения письма

$$R=a^2x^2+bx+c,$$

найдем, что

$$x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}=na\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{R}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)b\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{R}}+$$
$$+(n-1)c\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{R}},$$

откуда, деля на na, получим

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{R}}=a'x^{n-1}\sqrt{R}+a''\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{R}}+a'''\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{R}}, \qquad (1)$$

где a', a'', a''' — некоторые постоянные, точное значение которых для нас безразлично. Нам достаточно знать только, что это — постоянные.

Мы теперь имеем, пользуясь равенством (1):

$$\int\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{\sqrt{R}}\,dx=$$
$$=a_0\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{R}}+\int\frac{a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{\sqrt{R}}\,dx=a_0a'x^{n-1}\sqrt{R}+$$
$$+\int\frac{(a_0a''+a_1)x^{n-1}+(a_0a'''+a_2)x^{n-2}+\ldots+a_n}{\sqrt{R}}\,dx. \qquad (2)$$

Полагая $a_0a'=a_0$ и $f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, мы из (2) заключаем, что *какой бы ни был многочлен $f_n(x)$ n-й степени, всегда*

$$\int\frac{f_n(x)}{\sqrt{R}}\,dx=a_0x^{n-1}\sqrt{R}+\int\frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{R}}\,dx, \qquad (3)$$

где a_0 и $f_{n-1}(x)$ — *некоторое постоянное и некоторый многочлен $(n-1)$-й степени.* В более точном знании их пока нет нужды. Для нас важно только то, что интеграл левой части выразился через интеграл того же типа, но с более простым числителем. В то время как в числителе левой части мы имеем многочлен n-й степени, в правой части степень многочлена на единицу меньше.

Так как равенство (3) справедливо для любого многочлена, то его можно применить и к интегралу в правой части. Применяя же его последовательно несколько раз, получим равенства:

$$\int \frac{f_n(x)}{\sqrt{R}} dx = a_0 x^{n-1} \sqrt{R} + \int \frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{R}} dx,$$

$$\int \frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{R}} dx = a_1 x^{n-2} \sqrt{R} + \int \frac{f_{n-2}(x)}{\sqrt{R}} dx,$$

$$\int \frac{f_{n-2}(x)}{\sqrt{R}} dx = a_2 x^{n-3} \sqrt{R} + \int \frac{f_{n-3}(x)}{\sqrt{R}} dx, \qquad (4)$$

. . . .

$$\int \frac{f_2(x)}{\sqrt{R}} dx = a_{n-2} x \sqrt{R} + \int \frac{f_1(x)}{\sqrt{R}} dx,$$

$$\int \frac{f_1(x)}{\sqrt{R}} dx = a_{n-1} \sqrt{R} + \int \frac{f_0(x)}{\sqrt{R}} dx,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — неизвестные постоянные, а $f_{n-1}(x), \ldots, f_1(x)$, $f_0(x)$ — неизвестные многочлены, степень каждого из которых равна его индексу. Последний многочлен $f_0(x)$ как многочлен нулевой степени равен некоторой постоянной величине. Обозначая ее через β и складывая все равенства (4), получаем теорему:

Всегда имеет место равенство:

$$\int \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx =$$

$$= (a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) \sqrt{R} + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \qquad (5)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \beta$ — некоторые постоянные величины.

Так как интеграл в правой части мы можем вычислить (стр. 134), то интеграл левой части будет вычислен, если мы сумеем найти постоянные $a_0, a_1, \ldots, \beta$. Чтобы найти их, поступают так: пишут равенство (5) и затем его диференцируют. В полученном после диференцирования равенстве сравнивают коэфициенты при одинаковых степенях x. Получают уравнения, из которых находят неизвестные $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \beta$. Например, пусть требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{2x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Согласно теореме пишем

$$\int \frac{2x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\alpha x + \beta)\sqrt{1-x^2} + \gamma \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Диференцируя, находим

$$\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \alpha\sqrt{1-x^2} - \frac{(\alpha x+\beta)\,x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Умножаем на $\sqrt{1-x^2}$:

$$2x^2 = \alpha(1-x^2) - (\alpha x+\beta)\,x + \gamma = \alpha + \gamma - \beta x - 2\alpha x^2.$$

Сравнение коэфициентов при одинаковых степенях x дает

$$\alpha = -1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1,$$

а потому

$$\int \frac{2x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

§ 72. Заключение.

Различными методами могут быть вычислены интегралы типов:

1) $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx,$

2) $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,\ n>1$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a\pm bx^2}},\quad \int \sqrt{a\pm bx^2}\,dx,$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

5) $\int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

Мы рассмотрели различные методы интегрирования и применили их к вычислению целого ряда интегралов. Но если бы эти интегралы собрать в одну таблицу, то в своей совокупности они дали бы нам только простое собрание интегралов, не объединенных в одно органическое целое общей идеей. Внешне это проявилось бы в том, что каждый из них был бы вычислен своим методом, вообще неприменимым к вычислению других интегралов. Строго говоря, мы до сих пор изучали не столько интегралы от различных функций, сколько различные методы интегрирования. В результате же, несмотря на значительное число рассмотренных нами интегралов, мы все-таки стоим пока беспомощными перед таким простым вопросом: дан интеграл, можно ли, и если можно, то как его вычислить?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны изменить направление наших исследований. Мы должны рассматривать не различные методы интегрирования, а различные классы функций и исследовать, могут ли или не могут быть проинтегрированы функции того или другого класса, и если могут, то как.

Простейшими функциями являются многочлены; по степени сложности за ними идут рациональные функции, потом алгебраические и, наконец, трансцендентные.

Мы теперь перейдем к систематическому рассмотрению различных классов функций, интегралы которых могут быть вычислены. К таким классам прежде всего принадлежит класс многочленов. Так как

$$\int(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)\,dx=$$
$$=\frac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\frac{a_1x^n}{n}+\ldots+\frac{a_{n-1}x^2}{2}+a_nx+C,$$

то, следовательно,

интеграл от многочлена всегда может быть вычислен. Он равен многочлену же, степень которого на единицу больше степени интегрируемого многочлена.

За многочленами идут рациональные функции. Оказывается, как увидим, интеграл от всякой рациональной функции тоже всегда может быть вычислен, но вычисление его является достаточно сложной задачей. К постепенному решению ее мы и перейдем.

§ 73. Основные свойства многочлена.

При изучении методов интегрирования рациональных функций нам придется пользоваться некоторыми свойствами многочленов, которые обычно изучаются в высшей алгебре. Поэтому здесь мы ограничимся

только тем, что перечислим эти свойства, не останавливаясь над доказательствами их.

Всякий многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде суммы степенных функций с целыми и положительными показателями:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

где n — степень многочлена, x — его аргумент. Постоянные числа a_0, $a_1, \ldots, a_n$ называются его коэфициентами. Эти коэфициенты могут быть как действительными, так и мнимыми. Но в диференциальном и интегральном исчислениях мы ограничиваемся областью только действительных чисел. Поэтому

в дальнейшем мы будем рассматривать исключительно только многочлены с действительными коэфициентами.

Многочлены могут быть различных степеней.

Всякий многочлен первой степени

$$ax + b$$

называется линейным многочленом.

Это потому, что, как известно из аналитической геометрии, уравнением

$$y = ax + b$$

представляется прямая линия.

Всякое выражение

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

каковы бы ни были коэфициенты a_0, $a_1, \ldots, a_n$, есть многочлен. Но в строгом смысле слова его называют многочленом n-й степени только тогда, когда первый коэфициент a_0 не равен нулю; если же $a_0 = 0$, то это выражение будет многочленом не n-й степени, а низшей.

В частном случае, если все коэфициенты, кроме последнего a_n, равны нулю, многочлен $f(x)$ обращается в постоянное:

$$f(x) = a_n.$$

Так как, с другой стороны, всякое постоянное число C можно представить в форме многочлена

$$C = Cx^0,$$

то поэтому

всякое постоянное можно рассматривать как многочлен нулевой степени.

Одним из основных понятий в теории многочленов является понятие корня.

Корнем многочлена называется всякое число, обращающее многочлен в нуль.

Следовательно, если a — корень многочлена $f(x)$, то

$$f(a) = 0.$$

Даже и в том случае, когда все коэфициенты многочлена действительны, некоторые корни его, а иногда и все, могут быть комплексными. Но в высшей алгебре доказывается, что

если

$$a = p + qi$$

— мнимый корень многочлена $f(x)$ с действительными коэфициентами, то в таком случае число

$$b = p - qi,$$

сопряженное ему, тоже будет корнем многочлена.

Следовательно, если

$$f(p+qi) = 0,$$

то необходимо

$$f(p-qi) = 0.$$

Но это только при условии, что все коэфициенты действительны. Если же среди них есть хоть один мнимый, то хотя бы число $p+qi$ было корнем, число $p-qi$ может и не быть им.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — два многочлена:

$$\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$\psi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

соответственно степеней n и m. Если $n \geqq m$, то, произведя деление многочлена $\varphi(x)$ на $\psi(x)$, можно многочлен $\varphi(x)$ представить в такой форме:

$$\varphi(x) = \psi(x) \cdot \omega(x) + R(x), \quad (1)$$

где $\omega(x)$ и $R(x)$ — некоторые многочлены. Из них $R(x)$ называется остатком. Степень $R(x)$ необходимо меньше степени делителя $\psi(x)$. Степень же многочлена $\omega(x)$, называемого частным, равна разности $n-m$. В случае равенства степеней n и m частное $\omega(x)$ обращается в многочлен нулевой степени, т. е. в постоянное.

Если $n < m$, то и в этом случае многочлен $\varphi(x)$ можно представить в форме (1). Для этого достаточно принять $\omega(x) = 0$. Тогда получим

$$\varphi(x) = \psi(x) \cdot 0 + R(x),$$

и остаток $R(x)$ будет равен делимому $\varphi(x)$, а потому и в этом случае степень его будет меньше степени делителя $\psi(x)$. Следовательно,

всякий многочлен $\varphi(x)$ можно разделить на любой многочлен $\psi(x)$, в результате чего многочлен $\varphi(x)$ представляется в форме:

$$\varphi(x) = \psi(x) \cdot \omega(x) + R(x),$$

где $\omega(x)$ и $R(x)$ — многочлены, называемые частным и остатком. Степень остатка всегда меньше степени делителя $\psi(x)$.

Степень частного равна разности между степенями делимого и делителя, если степень делимого больше или равна степени делителя. Но если степень делимого меньше степени делителя, то частное равно нулю.

Рассмотрим частный случай деления многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

на линейный многочлен $x - c$. Пусть

$$f(x) = (x-c)\,\omega(x) + R(x). \quad (2)$$

Остаток $R(x)$ должен быть степени, которая меньше степени делителя $x-c$. Следовательно, он может быть только многочленом нулевой степени, т. е. постоянным. Таким образом, в равенстве (2) остаток $R(x)$ — необходимо некоторое постоянное число, которое не меняется с изменением x. Полагая же $x=c$, получим

$$f(c)=R(c).$$

Отсюда ясно, что $R=0$ тогда и только тогда, когда $f(c)=0$, т. е. когда c — корень многочлена $f(x)$. Получается так называемая

***Теорема Безу.* Многочлен $f(x)$ делится на одночлен $x-c$ без остатка:**

$$f(x)=(x-c)\cdot\omega(x),$$

тогда и только тогда, когда c — корень многочлена.

Опираясь в связи с другими и на эту теорему, в высшей алгебре доказывается следующая основная теорема:

Всякий многочлен n-й степени имеет n корней.

Каждый корень может быть или простым или кратным.

Если

$$a, b, c, \ldots, l$$

— все не равные между собой корни многочлена $f(x)$ и если

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$$

— кратности их, то многочлен $f(x)$ может быть представлен в форме

$$f(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}, \tag{3}$$

где a_0 — коэфициент при первом члене многочлена.

Если коэфициенты многочлена действительны, то всякая пара его сопряженных корней имеет всегда один и тот же порядок кратности.

Эту теорему, на которую будет опираться все дальнейшее изложение, примем без доказательства.

Равенство (3) показывает, что в с я к и й м н о г о ч л е н м о ж е т б ы т ь п р е д с т а в л е н в в и д е п р о и з в е д е н и я т о л ь к о л и н е й н ы х м н о ж и т е л е й.

Несмотря на всю простоту, разложение (3) применимо для целей интегрального исчисления не всегда, а только в том случае, когда все корни действительны. Поэтому является вопрос: нельзя ли и в случае мнимых корней преобразовать разложение (3) так, чтобы многочлен представился в виде произведения только действительных множителей, хотя бы уже не линейных, но все-таки достаточно простых? Это оказывается возможным, если коэфициенты многочлена $f(x)$ все действительны. В этом случае, если a и b — два мнимых сопряженных корня:

$$a=p+qi, \quad b=p-qi,$$

то кратности их, как было указано, необходимо равны:

$$\alpha=\beta.$$

Выделим в разложении (3) отдельно первые два множителя. Имеем

$$(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}=[(x-a)(x-b)]^{\alpha}.$$

Но

$$(x-a)(x-b)=(x-p-qi)(x-p+qi)=$$
$$=(x-p)^2-(qi)^2=x^2-2px+p^2+q^2.$$

В правой части появился многочлен второй степени, но уже с действительными коэфициентами. Произведение двух мнимых сопряженных линейных множителей заменилось одним действительным множителем, правда, уже не линейным, но зато действительным. Теперь разложение (3) можно переписать в такой форме:

$$f(x)=(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}.$$

Ясно, чего мы можем достигнуть, идя и дальше тем же путем. Имея многочлен $f(x)$, мы его представляем себе разложенным на линейные множители в форме

$$f(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}. \qquad (4)$$

Затем в правой части оставляем без изменения все действительные множители, т. е. все множители, соответствующие действительным корням. Каждый же мнимый множитель вместе с сопряженным ему множителем соединяем в один действительный, который будет квадратным многочленом. Таким образом, в правой части (4) все линейные действительные множители останутся, а каждая пара сопряженных мнимых множителей даст один действительный. Мы видим:

Всякий многочлен с действительными коэфициентами может быть представлен в виде произведения степеней линейных многочленов и многочленов второй степени тоже с действительными коэфициентами. При этом каждому действительному корню соответствует линейный множитель в степени его кратности, а каждой паре сопряженных корней соответствует квадратный многочлен в степени их общей кратности.

Следовательно, каждый многочлен может быть представлен в такой форме:

$$f(x)=(px+q)^{\alpha}(p'x+q')^{\beta}(p''x+q'')^{\gamma}\ldots(a'x^2+b'x+c')^{n}$$
$$(a''x^2+b''x+c'')^{m}\ldots(a'''x^2+b'''x+c''')^{k}\ldots,$$

где коэфициенты множителей все действительны. Правда, множители этого разложения более сложны, чем множители разложения (3), но зато все они уже действительны.

§ 74. Рациональная функция.

Рациональной функцией называется всякая функция, значение которой может быть получено, производя над значением ее аргумента и постоянными числами только так называемые рациональные действия, т. е. действия сложения, вычитания, умножения, деления и возвышения в целую степень. Такая функция после соответствующих преобразований всегда может быть представлена в форме частного двух многочленов.

Ниже мы будем предполагать, что эти предварительные преобразования для всякой данной функции уже выполнены. Следовательно, будем предполагать, что всякая рациональная функция нам дана в виде отношения

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

некоторых двух многочленов:

$$\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$\psi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m.$$

Всякое выражение

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — многочлены, называется правильной дробью, если степень числителя меньше степени знаменателя. Оно называется неправильной дробью, если степень числителя больше или равна степени знаменателя.

Следовательно, из выражений:

$$\frac{2x^2+1}{3x^5+7x-3}, \quad \frac{5x^8+4x+9}{3x^4-12x+1}, \quad \frac{8x^4+1}{9x^4-1}$$

первое есть правильная дробь; два остальных — неправильные дроби.

Всякое выражение вида

$$\frac{ax+b}{px+q},$$

т. е. всякая рациональная функция, представленная в виде отношения двух линейных многочленов, называется дробной линейной функцией.

Вернемся к общему случаю. Пусть выражение

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

— неправильная дробь. Разделим многочлен $\varphi(x)$ на многочлен $\psi(x)$. Если частное и остаток обозначим через $\omega(x)$ и $\varphi_1(x)$, то получим равенство

$$\varphi(x) = \psi(x)\,\omega(x) + \varphi_1(x). \tag{2}$$

Так как степень остатка всегда меньше степени делителя, то степень многочлена $\varphi_1(x)$ меньше степени многочлена $\psi(x)$.

Из (1) имеем:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \omega(x) + \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}. \tag{3}$$

В правой части первое слагаемое есть многочлен, а второе — правильная дробь. Следовательно,

всякая неправильная дробь всегда может быть представлена в виде суммы некоторого многочлена, называемого ее целой частью, и некоторой уже правильной дроби.

Если выражение $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ — правильная дробь, то и для него имеет место равенство (3), если в нем принять $\omega(x)=0$ и $\varphi_1(x)=\varphi(x)$. Поэтому можно говорить о целой части и правильной дроби, принимая эту целую часть равной нулю.

В частном случае дробное выражение $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, если его знаменатель тождественно равен единице, обращается в многочлен. Поэтому всякий многочлен есть частный случай рациональной функции.

§ 75. Элементарные дроби.

Среди дробных выражений особого внимания заслуживают элементарные дроби.

Элементарной дробью первого рода называется всякое выражение вида

$$\frac{A}{(px+q)^n},$$

числителем которого служит постоянная величина, а знаменателем — целая степень линейного многочлена.

Элементарной дробью второго рода называется всякое выражение вида

$$\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n},$$

числителем которого служит линейный многочлен или постоянное, а знаменателем — целая положительная степень квадратного многочлена.

Интегрирование элементарных дробей первого типа легко приводится к интегрированию степенной функции. Мы видели, что хотя и сложным путем, но и интегралы от дробей второго типа тоже могут быть вычислены (стр. 133).

§ 76. Разложение рациональной функции на элементарные дроби первого типа.

После всех предыдущих предварительных разъяснений можем перейти к доказательству следующей теоремы, основной в теории интегрирования рациональных функций.

Всякая рациональная функция может быть представлена или, как принято говорить, может быть разложена на сумму многочлена и элементарных дробей первого типа.

Докажем эту теорему.

Пусть $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ — данная рациональная функция, представленная как частное двух многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Обозначим через a какой-нибудь из корней знаменателя $\psi(x)$, через n — его кратность. Тогда знаменатель $\psi(x)$ может быть представлен в форме:

$$\psi(x)=(x-a)^n\psi_1(x), \tag{1}$$

где $\psi_1(x)$ — некоторый многочлен. Для дальнейшего важно отметить, что этот многочлен заведомо не обращается в нуль при $x=a$:

$$\psi_1(a) \neq 0. \qquad (2)$$

Действительно, если бы он обращался в нуль, то число a было бы корнем многочлена $\psi(x)$ кратности не n, а высшей.

В частном случае многочлен $\psi_1(x)$ может оказаться равным постоянному. В этом случае знаменатель приводится к целой степени линейного многочлена, и данная рациональная функция будет вида

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}.$$

В общем случае мы имеем:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}.$$

Взяв теперь совершенно произвольно какое-нибудь постоянное A, мы можем написать равенство

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}.$$

Приводя к общему знаменателю два последних члена, получим:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{-A\psi_1(x)+\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}. \qquad (3)$$

Это равенство справедливо, каково бы ни было A. Посмотрим, нельзя ли его выбрать так, чтобы числитель второй дроби, т. е. многочлен

$$-A\psi_1(x)+\varphi(x), \qquad (4)$$

делился без остатка на $x-a$. Если бы это оказалось возможным, то дробь приняла бы более простой вид после сокращения на $x-a$.

По теореме Безу, чтобы многочлен делился на $x-a$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы число a было корнем этого многочлена. Следовательно, чтобы многочлен (4) делился на $x-a$ без остатка, необходимо и достаточно выбрать A так, чтобы имело место равенство

$$-A\psi_1(a)+\varphi(a)=0,$$

откуда

$$A=\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}. \qquad (5)$$

Мы видим, что желаемое A можно найти, потому что $\psi_1(a)\neq 0$.

Предположим же, что в (3) мы взяли A не произвольно, а таким, как оно определяется равенством (5). Тогда выражение (4) делится на $x-a$ без остатка. Обозначая частное через $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x)=\frac{-A\psi_1(x)+\varphi(x)}{(x-a)},$$

где $\varphi_1(x)$—некоторый многочлен, из (3) мы получим следующее равенство, которое формулируем как первую лемму.

Первая лемма. Если многочлен $\psi_1(x)$ не обращается в нуль при $x=a$, то всегда можно найти такое вполне определенное постоянное A, что

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1}\psi_1(x)}, \tag{6}$$

где $\varphi_1(x)$ — некоторый многочлен.

Но к выражению

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1}\psi_1(x)}$$

мы можем применить ту же лемму. Применяя ее, получим равенство:

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1}\psi_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2}\psi_1(x)},$$

где A_1 — некоторое постоянное, а $\varphi_2(x)$ — некоторый многочлен.

Теперь к выражению $\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2}\psi_1(x)}$ мы опять можем применить ту же лемму.

Применим же эту лемму последовательно несколько раз. Обозначая через

$$A,\ A_1,\ A_2,\dots,A_{n-1}$$

соответствующие постоянные, а через

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\dots,\ \varphi_n(x)$$

— соответствующие многочлены, мы получим равенства:

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}&=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1}\psi_1(x)},\\
\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1}\psi_1(x)}&=\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2}\psi_1(x)},\\
\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2}\psi_1(x)}&=\frac{A_2}{(x-a)^{n-2}}+\frac{\varphi_3(x)}{(x-a)^{n-3}\psi_1(x)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\varphi_{n-2}(x)}{(x-a)^2\psi_1(x)}&=\frac{A_{n-2}}{(x-a)^2}+\frac{\varphi_{n-1}(x)}{(x-a)\psi_1(x)},\\
\frac{\varphi_{n-1}(x)}{(x-a)\psi_1(x)}&=\frac{A_{n-1}}{x-a}+\frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Применять дальше нашу лемму уже нельзя, потому что в знаменателе последней дроби нет множителя $(x-a)$.

Сложим все равенства (7). После очевидных сокращений получим некоторое равенство. Для удобства дальнейшего обозначим в нем многочлен $\varphi_n(x)$ через $\varphi_1(x)$. Тогда получим вторую лемму.

Вторая лемма. **Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — многочлены и a — корень n-й кратности многочлена $\psi(x)$, то всегда существуют такие постоянные $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, что имеет место равенство**

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \ldots + \frac{A_{n-2}}{(x-a)^2} + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \tag{8}$$

где $\varphi_1(x)$ — некоторый вполне определенный многочлен.

Постоянные $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ называются коэфициентами разложения. Выражение

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(x-a)} \tag{9}$$

называется полярной частью данной функции $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, соответствующей корню a.

Обозначая эту полярную часть через P_a, равенство (8) можем переписать в такой форме:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)} = P_a + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}. \tag{10}$$

Если теперь b — корень кратности m знаменателя $\psi_1(x)$, так что

$$\psi_1(x) = (x-b)^m \psi_2(x),$$

то таким же образом мы можем разложить и дробь $\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$, стоящую в правой части (10). Тогда она представится в форме:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{(x-b)^m \psi_2(x)} = P_b + \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

где P_b — полярная часть, соответствующая корню b.

В общем случае предположим, что знаменатель $\psi(x)$ данной рациональной дроби имеет m не равных между собой корней

$$a, b, c, \ldots, k, l$$

соответственно кратности

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda.$$

Тогда многочлен $\psi(x)$ представится в такой форме:

$$\psi(x) = a_0 (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda.$$

Пусть для сокращения письма

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= (x-a)^\alpha \psi_1(x), \\
\psi_1(x) &= (x-b)^\beta \psi_2(x), \\
\psi_2(x) &= (x-c)^\gamma \psi_3(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi_{m-2}(x) &= (x-k)^\varkappa \psi_{m-1}(x), \\
\psi_{m-1}(x) &= (x-l)^\lambda \psi_m(x),
\end{aligned}$$

где последний многочлен $\psi_m(x)$ при этом вырождается в постоянное a_0. Применяя несколько раз вторую лемму, имеем равенства

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha \psi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-b)^\beta \psi_2(x)} = \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

$$\frac{\varphi_2(x)}{(x-c)^\gamma \psi_3(x)} = \frac{C}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{C_{\gamma-1}}{(x-c)} + \frac{\varphi_3(x)}{\psi_3(x)},$$

. . . .

$$\frac{\varphi_{m-2}(x)}{(x-k)^\varkappa \psi_{m-1}(x)} = \frac{K}{(x-k)^\varkappa} + \frac{K_1}{(x-k)^{\varkappa-1}} + \ldots + \frac{K_{\varkappa-1}}{(x-k)} + \frac{\varphi_{m-1}(x)}{\psi_{m-1}(x)},$$

$$\frac{\varphi_{m-1}(x)}{(x-l)^\lambda \psi_m(x)} = \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)} + \frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)},$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ — какие-то многочлены.

Складываем все эти равенства. Последний член

$$\frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)} = \frac{\varphi_m(x)}{a_0}$$

есть многочлен. В частном случае он может оказаться равным нулю. Его обозначим через $F(x)$ и поставим на первое место. Получается

Теорема. **Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — многочлены и если**

$$\psi(x) = a_0(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda, \tag{11}$$

то рациональная функция $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ всегда может быть представлена в следующей форме:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = F(x) &+ \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} + \\ &+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + \\ &+ \frac{C}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{C_{\gamma-1}}{(x-c)} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)},\end{aligned} \tag{12}$$

где $F(x)$ — многочлен, являющийся целой частью разлагаемой функции, и

$$A, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}, B, B_1, \ldots, B_{\beta-1}, \ldots, L_{\lambda-1}$$

— постоянные, называемые коэфициентами разложения.

Если данная дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ правильная, то многочлен $F(x)$, очевидно, тождественно равен нулю.

Разложение (12) имеет место при всяких корнях как действительных, так и мнимых. Коэфициенты при x во всех линейных множителях (11) равны единице. В приложениях они часто даются отличными от единицы.

Пусть $px+q$ — линейный множитель, стоящий в знаменателе в некоторой степени. Тогда этому множителю соответствует корень $-\frac{q}{p}$, потому что:

$$px+q=p\left(x+\frac{q}{p}\right).$$

Полярная часть, соответствующая этому корню, будет состоять из суммы дробей типа

$$\frac{A'}{\left(x+\frac{q}{p}\right)^k}=\frac{A'p^k}{(px+q)^k}.$$

Полагая $A=A'p^k$, получим дробь типа:

$$\frac{A}{(px+q)^k}.$$

Следовательно, при разложении рациональной дроби всегда можно знаменатели полярных частей брать в той форме, в которой они стоят в знаменателе данной функции. Так, например, если

$$\frac{\varphi(x)}{(3x+1)^3(2x+5)^2(7x+8)}$$

— данная рациональная функция, то согласно теореме всегда можно найти такие постоянные A, B, $C, \ldots$, чтобы имело место равенство:

$$\frac{\varphi(x)}{(3x+1)^3(2x+5)^2(7x+8)}=F(x)+\frac{A}{(3x+1)^3}+\frac{B}{(3x+1)^2}+$$

$$+\frac{C}{3x+1}+\frac{D}{(2x+5)^2}+\frac{E}{(2x+5)}+\frac{K}{7x+8},$$

где $F(x)$ — многочлен, равный целой части левой части, если она неправильная дробь, и равный нулю, если она правильная дробь.

§ 77. Интегрирование рациональной функции в случае действительных корней знаменателя.

Разложением рациональной функции на элементарные дроби первого типа мы можем воспользоваться для вычисления ее интеграла в том случае, когда все корни знаменателя действительны. В самом деле, если попрежнему:

$$\psi(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda,$$

то, как мы видели,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = F(x) + \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{A_{\alpha-2}}{(x-a)^2} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} +$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \dots + \frac{B_{\beta-2}}{(x-b)^2} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + \qquad (1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \dots + \frac{L_{\lambda-2}}{(x-l)^2} + \frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)}.$$

Пусть

$$\int F(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

Так как $F(x)$ — многочлен, то интеграл $\Phi(x)$ от него мы всегда без труда можем вычислить. По теореме об интеграле суммы из (1) имеем:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = \Phi(x) +$$

$$-\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \dots - \frac{A_{\alpha-2}}{(x-a)} + A_{\alpha-1}\ln|x-a| +$$

$$-\frac{B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \dots - \frac{B_{\beta-2}}{(x-b)} + B_{\beta-1}\ln|x-b| + \qquad (2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-\frac{L}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} - \dots - \frac{L_{\lambda-2}}{(x-l)} + L_{\lambda-1}\ln|x-l| + C,$$

и интеграл от $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ вычислен. Следовательно,

в случае действительных корней знаменателя интеграл от всякой рациональной функции всегда может быть вычислен разложением ее на элементарные дроби первого типа.

Но даже и для случая действительных корней знаменателя мы задачу об интегрировании рациональной функции не можем еще считать решенной окончательно, потому что для этого предварительно надо разложить рациональную функцию на элементарные дроби. Очевидно, одно дело доказать возможность такого разложения и совсем иное дело фактически *произвести такое разложение, т. е. вычислить коэфициенты* $A, B, \dots, L$.

Чтобы разложить рациональную функцию на элементарные дроби, прежде всего необходимо знать корни ее знаменателя. Высшая алгебра учит, как их можно вычислить в каждом случае с желаемой степенью точности. Поэтому, считая задачу о вычислении корней задачей высшей алгебры, мы ниже будем предполагать эти корни уже известными.

Если степень числителя $\varphi(x)$ выше или равна степени знаменателя $\psi(x)$, то, произведя деление $\varphi(x)$ на $\psi(x)$ и вычислив частное $\omega(x)$ и остаток $\varphi_1(x)$, мы данную рациональную функцию можем представить в виде

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \omega(x) + \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)},$$

где $\frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}$ — уже правильная дробь. Поэтому будем предполагать, что данная рациональная функция уже приведена к правильной дроби.

Существует несколько методов для вычисления коэфициентов разложения. Из них здесь мы рассмотрим три.

§ 78. Метод диференцирования.

Пусть

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)}$$

— *данная рациональная функция.*

Предполагая ее правильной дробью, мы согласно второй лемме имеем:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(x-a)} + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}. \quad (1)$$

Умножая на $(x-a)^n$, получаем:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} = A + A_1(x-a) + \ldots + A_{n-1}(x-a)^{n-1} + (x-a)^n \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \quad (2)$$

где многочлен $\psi_1(x)$ не обращается в нуль при $x = a$.

Обозначая левую часть (2) через $\omega(x)$:

$$\omega(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} \quad (3)$$

и полагая $x - a = h$, $x = a + h$, заменим во (2) x через $a + h$. Получим

$$\omega(a+h) = A + hA_1 + h^2A_2 + \ldots + h^{n-1}A_{n-1} + h^n \frac{\varphi_1(a+h)}{\psi_1(a+h)}. \quad (4)$$

В то же время по строке Тейлора

$$\omega(a+h) = \omega(a) + h\omega'(a) + \frac{h^2\omega''(a)}{2!} + \ldots + h^{n-1}\frac{\omega^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + h^n \frac{\omega^{(n)}(a+\theta h)}{n!}, \quad (5)$$

где остаток взят в форме Лагранжа.

Сравнивая коэфициенты при одинаковых степенях у h в правых частях (4) и (5), заключаем, что

$$A = \omega(a), \quad A_1 = \frac{\omega'(a)}{1}, \ldots, A_{n-1} = \frac{\omega^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},$$

и вообще

$$A_k = \frac{\omega^{(k)}(a)}{k!}. \quad (6)$$

Принимая во внимание (3), мы видим: чтобы вычислить A_k, надо выражение

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} \quad (7)$$

продиференцировать k раз и в полученной производной положить $x=a$. Поэтому равенство (6) можно записать так:

$$A_k = \frac{1}{k!} \Big/^{x=a} \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right). \tag{8}$$

Мы видим, что

при разложении рациональной функции

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)},$$

знаменатель которой имеет a корнем кратности n, коэфициенты полярной части

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a},$$

соответствующей этому корню a, могут быть вычислены диференцированием соответственное число раз выражения:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} \tag{9}$$

по формуле:

$$A_k = \frac{1}{k!} \Big/^{x=a} \frac{d^k\left(\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right)}{dx^k}. \tag{10}$$

Так как a — произвольно взятый корень знаменателя, то таким же путем могут быть вычислены и все остальные коэфициенты разложения.

Этот способ вычисления коэфициентов можно назвать методом диференцирования. Несмотря на свою теоретическую простоту, ясно, что он мало пригоден для фактического вычисления, потому что уже производная первого порядка от выражения (9) достаточно сложна:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right) = \frac{\psi_1(x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\,\psi_1'(x)}{\psi_1(x)^2}.$$

Сложность второй производной, а тем более следующих, очевидна.

К этому еще прибавляется то, что по существу вычисление всех этих производных является непродуктивной затратой времени и труда, потому что в конце концов нам нужны не сами производные, а только их значения при $x=a$.

Таким образом, для практических целей метод диференцирования мало пригоден. *Необходимо искать другие методы.*

Метод диференцирования прилагается очень легко только в двух случаях: или когда все корни знаменателя простые; или когда знаменатель имеет только один корень любой кратности, т. е. когда данная рациональная функция вида

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}.$$

Рассмотрим сначала этот второй случай. Согласно общей теореме имеем:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}=F(x)+\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{(x-a)},$$

и в правой части больше никаких членов нет. Отсюда

$$\varphi(x)=A+A_1(x-a)+\ldots+A_{n-1}(x-a)^{n-1}+(x-a)^nF(x).$$

Полагая $x=a+h$, получим:

$$\varphi(a+h)=A+hA_1+h^2A_2+\ldots+h^{n-1}A_{n-1}+h^nF(a+h).$$

Располагая левую часть по степеням h и сравнивая коэфициенты при одинаковых степенях h, вычислим A, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ и многочлен $F(x)$.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int\frac{4x^3-5x+7}{(2x-1)^{10}}\,dx.$$

Полагая

$$2x-1=h,\quad x=\frac{1}{2}+\frac{h}{2};$$

найдем, что

$$\frac{4x^3-5x+7}{(2x-1)^{10}}=\frac{4\left(\frac{1+h}{2}\right)^3-5\,\frac{1+h}{2}+7}{h^{10}}=$$

$$=\frac{10-2h+3h^2+h^3}{2h^{10}}=\frac{5}{h^{10}}-\frac{1}{h^9}+\frac{3}{2h^8}+\frac{1}{2h^7}.$$

Заменяя опять h через $2x-1$, получим

$$\frac{4x^3-5x+7}{(2x-1)^{10}}=\frac{5}{(2x-1)^{10}}-\frac{1}{(2x-1)^9}+\frac{3}{2(2x-1)^8}+\frac{1}{2(2x-1)^7},$$

а потому

$$\int\frac{4x^3-5x+7}{(2x-1)^{10}}\,dx=-\frac{5}{18(2x-1)^9}+$$

$$+\frac{1}{16(2x-1)^8}-\frac{3}{28(2x-1)^7}-\frac{1}{24(2x-1)^6}+C,$$

и интеграл вычислен.

Рассмотрим теперь случай, когда знаменатель выражения

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

имеет только простые корни. Пусть

$$\psi(x)=a_0(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

Предполагая дробь правильной, имеем:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{K}{x-l}. \qquad (11)$$

Отсюда

$$\frac{\varphi(x)(x-a)}{\psi(x)}=A+(x-a)\left(\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{K}{x-l}\right).$$

Пусть x стремится к a. В пределе имеем:

$$A=\lim_{x\to a}\varphi(x)\cdot\frac{x-a}{\psi(x)}=\varphi(a)\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\psi(x)}.$$

Второй множитель в пределе имеет неопределенный вид. Применяя правило Лопиталя, найдем

$$A=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Очевидно, что

$$B=\frac{\varphi(b)}{\psi'(b)},\quad C=\frac{\varphi(c)}{\psi'(c)}.$$

Теперь из (1) получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)(x-a)}+\frac{\varphi(b)}{\psi'(b)(x-b)}+\ldots+\frac{\varphi(l)}{\psi'(l)(x-l)},\qquad (12)$$

и левая часть разложена на элементарные дроби.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$G=\int\frac{2x^2+1}{x^3-x}\,dx.$$

В данном случае

$$x^3-x=x(x-1)(x+1),$$

а потому

$$\frac{2x^2+1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Полагая

$$\varphi(x)=2x^2+1,\quad \psi(x)=x^3-x,\quad \psi'(x)=3x^2-1,$$

имеем

$$A=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=-1,\quad B=\frac{\varphi(1)}{\psi'(1)}=\frac{3}{2},\quad C=\frac{\varphi(-1)}{\psi'(-1)}=\frac{3}{2},$$

а потому

$$\int\frac{2x^2+1}{x^3-x}\,dx=\int\left\{-\frac{1}{x}+\frac{3}{2(x-1)}+\frac{3}{2(x+1)}\right\}dx=$$

$$=-\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x^2-1|+C.$$

§ 79. Метод произвольных значений.

Сущность этого метода легко выясняется на примере. Пусть требуется вычислить интеграл

$$G=\int\frac{x^2+6}{(x+3)^2(2x+1)}\,dx.\qquad (1)$$

Согласно общей теории пишем:

$$\frac{x^2+6}{(x+3)^2(2x+1)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{2x+1}. \qquad (2)$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая затем числителей, получаем

$$x^2+6 = A(2x+1) + B(x+3)(2x+1) + C(x+3)^2. \qquad (3)$$

Это равенство должно иметь место при всяком x. Если мы в нем примем x равным, например, 7, то получим уравнение между неизвестными A, B, C. Поэтому, так как у нас три неизвестных, то дадим x произвольно три каких-нибудь значения. Получим три уравнения первой степени относительно A, B, C. Решив эти уравнения, найдем неизвестные.

Конечно, естественно для x выбирать такие значения, чтобы вычисления были по возможности просты. В нашем случае, полагая x последовательно равным 0, 1 и -1, получим три следующих уравнения:

$$A+3B+9C=6,$$

$$3A+12B+16C=7,$$

$$-A-2B+4C=7,$$

из которых найдем:

$$A=-3, \quad B=0, \quad C=1.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2+6}{(x+3)^2(2x+1)}\,dx = \int\left\{\frac{-3}{(x+3)^2} + \frac{1}{2x+1}\right\}dx =$$

$$= \frac{3}{x+3} + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C,$$

и интеграл вычислен.

Когда для определения коэфициентов разложения в соответствующем равенстве дают переменному столько произвольно выбранных значений, сколько коэфициентов разложения, то говорят, что применяют метод произвольных значений.

Этот метод всегда ведет к цели, хотя обычно сопровождается длинными вычислениями. Они сокращаются, если значения для x удачно выбраны. Этот выбор сам собой напрашивается в том случае, который необходимо отметить, когда все корни a_1, $a_2, \ldots, a_n$ знаменателя $\psi(x)$ простые, так что:

$$\psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

В этом случае, предполагая данную дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ правильной, имеем:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}. \qquad (4)$$

Чтобы вычислить A_1, помножаем обе части равенства на $x - a_1$. Тогда в левой части этот множитель в знаменателе сократится, и мы получим равенство:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)} = A_1 + (x-a_1)\left(\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}\right). \quad (5)$$

Полагая в нем $x = a_1$, найдем:

$$\frac{\varphi(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} = A_1,$$

и постоянное A_1 вычислено. На практике равенство (5) можно, конечно, не писать, потому что, смотря на (4), его нетрудно мысленно представить.

Умножая мысленно (4) на $x - a_2$ и полагая затем $x = a_2$, найдем:

$$\frac{\varphi(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} = A_2$$

и т. д. Помножая, наконец, на $x - a_n$ и полагая $x = a_n$, получим:

$$\frac{\varphi(a_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})} = A_n,$$

и все коэфициенты разложения вычислены.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$G = \int \frac{2x+3}{(2x-1)(x+1)(x-4)}\,dx.$$

Пишем

$$\frac{2x+3}{(2x-1)(x+1)(x-4)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-4};$$

Помножая мысленно на $2x - 1$ и полагая $x = \frac{1}{2}$, найдем

$$A = \frac{4}{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)} = -\frac{16}{21}.$$

Помножая на $x + 1$ и полагая $x = -1$, получим:

$$B = \frac{1}{-3\cdot -5} = \frac{1}{15}.$$

Таким же путем найдем:

$$C = \frac{11}{7\cdot 5} = \frac{11}{35}.$$

Теперь имеем:

$$G = \int\left\{-\frac{16}{21(2x-1)} + \frac{1}{15(x+1)} + \frac{11}{35(x-4)}\right\}dx =$$

$$= -\frac{8}{21}\ln|2x-1| + \frac{1}{15}\ln|x+1| + \frac{11}{35}\ln|x-4| + C.$$

Следовательно, можно дать

***Правило*. При вычислении коэфициентов разложения полезно переменному давать значения, равные корням знаменателя.**

Это полезно и в том случае, когда не все корни простые. Пусть, например, требуется вычислить интеграл:

$$G=\int\frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3}\,dx. \tag{6}$$

Знаменатель равен $(x-1)^3(x+1)^3$, а потому пишем:

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)}+$$
$$+\frac{D}{(x+1)^3}+\frac{E}{(x+1)^2}+\frac{F}{(x+1)}. \tag{7}$$

После приведения к общему знаменателю получим

$$3x^2+1=A(x+1)^3+B(x+1)^3(x-1)+C(x+1)^3(x-1)^2+$$
$$+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+1)+F(x-1)^3(x+1)^2. \tag{8}$$

Полагая $x=+1$ и $x=-1$, найдем

$$A=\frac{1}{2},\quad D=-\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Два коэфициента вычислены. Чтобы вычислить остальные, даем x значение нуль. Получим уравнение:

$$A-B+C-D-E-F=1. \tag{10}$$

Необходимо получить еще три уравнения.

Дать x значение нуль — значит в многочленах, стоящих в правой и левой частях равенства (8), сравнить свободные члены. Полезно также всегда сравнивать коэфициенты при наивысших степенях переменного.

В правой части равенства (8) стоит, как нетрудно видеть, многочлен пятой степени. Коэфициент при x^5 легко найти. Приравнивая его коэфициенту при той же степени в левой части, получим уравнение

$$C+F=0. \tag{11}$$

Чтобы получить еще два уравнения, можно было бы просто дать x в (8) два каких-нибудь значения. Но лучше поступить так: продиференцируем равенство (8) и после диференцирования положим x равным одному из корней знаменателя, в нашем случае равным $+1$ или -1. При этом заметим, что фактически нет нужды диференцировать все члены. Действительно, если мы имеем член вида:

$$(x-a)^k\omega(x),\quad k>1$$

и после диференцирования мы должны положить $x=a$, то ясно, что мы получим нуль. Вообще, если после диференцирования будет принято $x=a$, то те члены, в которые $x-a$ входит в некоторой степени, можно и не писать.

Диференцируем же равенство (3) с целью, чтобы после диференцирования положить $x=1$. Поэтому при диференцировании выписываем только те члены, в которые $(x-1)$ не входит общим множителем. Получим:

$$6x = 3A(x+1)^2 + B(x+1)^3 + \ldots$$

Полагая здесь $x=1$, найдем:

$$12A + 8B = 6. \qquad (12)$$

Диференцируем теперь (8), чтобы потом положить $x=-1$. Поэтому члены, содержащие $x+1$ множителем, не выписываем. Найдем

$$6x = 3D(x-1)^2 + E(x-1)^3 + \ldots$$

Полагая $x=-1$, получим:

$$12D - 8E = -6. \qquad (13)$$

Теперь из (9), (10), (11), (12), (13) — из шести уравнений — найдем

$$A=\frac{1}{2}, \quad D=-\frac{1}{2}, \quad B=C=E=F=0,$$

а потому

$$\int\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}dx=\int\left\{\frac{1}{2(x-1)^3}-\frac{1}{2(x+1)^3}\right\}dx=$$

$$=-\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^2}+C=-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C. \qquad (14)$$

§ 80. Метод сравнения коэфициентов.

Вычислим интеграл

$$G=\int\frac{4x^4+16x^3+17x^2+6x}{(2x+3)^2(x+1)}dx. \qquad (1)$$

Знаменатель — третьей степени, числитель — четвертой. Следовательно, целая часть есть некоторый многочлен первой степени. Поэтому пишем:

$$\frac{4x^4+16x^3+17x^2+6x}{(2x+3)^2(x+1)}=$$

$$=Ax+B+\frac{C}{(2x+3)^2}+\frac{D}{(2x+3)}+\frac{E}{x+1}. \qquad (2)$$

Приводим к общему знаменателю и приравниваем числителей:

$$4x^4+16x^3+17x^2+6x=(Ax+B)(2x+3)^2(x+1)+C(x+1)+$$
$$+D(2x+3)(x+1)+E(2x+3)^2.$$

В правой части раскрываем скобки и располагаем по степеням x:

$$4x^4+16x^3+17x^2+6x=4Ax^4+(16A+4B)x^3+$$
$$+(21A+16B+2D+4E)x^2+(9A+21B+C+5D+12E)x+$$
$$+(9B+C+3D+9E).$$

Коэфициенты при одних и тех же степенях x в той и другой части должны быть равны. Приравнивая их, получим уравнения:

$$4A=4;\quad 16A+4B=16;$$

$$21A+16B+2D+4E=17;$$

$$9A+21B+C+5D+12E=6;$$

$$9B+C+3D+9E=0.$$

Числом их столько же, сколько неизвестных постоянных. Решая их, найдем:

$$A=1,\quad B=0,\quad C=9,\quad D=0,\quad E=-1,$$

а потому

$$\int\frac{4x^4+16x^3+17x^2+6x}{(2x+3)^2(x+1)}\,dx=\int\left\{x+\frac{9}{(2x+3)^2}-\frac{1}{x+1}\right\}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2(2x+3)}-\ln|x+1|+C. \qquad (3)$$

Когда для вычисления коэфициентов разложения сравнивают коэфициенты при одинаковых степенях неизвестного, то говорят, что применяют метод сравнения коэфициентов.

Следовательно, интеграл (1) вычислен методом сравнения коэфициентов.

§ 81. Сравнение методов.

Мы рассмотрели три метода: метод диференцирования, метод произвольных значений и метод сравнения коэфициентов. Какой же из них предпочесть на практике?

Первый метод, метод диференцирования, имеет большое значение при теоретических исследованиях, но на практике он ведет к длинным вычислениям, а потому естественно отпадает. Он с выгодой применяется только в том частном случае, когда данная функция имеет вид:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}.$$

Тогда искомое разложение получается быстро. Полагая $x-a=h$, $x=a+h$, мы имеем:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}=\frac{\varphi(a+h)}{h^n}=\frac{A+A_1h+\ldots+A_nh^m}{h^n},$$

и разложение получено.

Из двух остальных методов предпочтение того или другого зависит от личного вкуса. Метод сравнения коэфициентов спокоен. Он требует только механического выполнения определенных действий. В этом отношении метод произвольных значений требует большого напряжения внимания, но зато он не требует раскрытия скобок. Во всяком случае, если все корни простые, то он имеет неоспоримое преимущество на практике, и в этом случае всегда надо пользоваться им.

Если данная рациональная функция — неправильная дробь, то, как правило, предпочтительней сначала простым делением исключить ее целую часть. Но можно поступать и так, как мы поступили при вычислении интеграла (1) на стр. 159.

Читателю рекомендуется для полного овладения указанными методами решить несколько задач обоими методами: методом произвольных значений и методом сравнения коэфициентов.

§ 82. Интегрирование рациональных функций в случае мнимых корней знаменателя.

Пусть попрежнему

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

— данная рациональная функция, но предположим, что среди корней ее знаменателя есть не только действительные, но и мнимые, которые, так как все коэфициенты многочлена $\psi(x)$ действительны, необходимо попарно сопряжены и одной и той же кратности. Мы видели (стр. 143), что в таком случае знаменатель может быть представлен в виде произведения линейных множителей и множителей второй степени:

$$\psi(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(a'x^2+b'x+c')^{n}\ldots,$$

где каждый линейный множитель соответствует действительному корню, а каждый квадратный трехчлен — паре сопряженных мнимых корней.

Пусть

$$x_1 = p+qi \quad \text{и} \quad x_2 = p-qi \tag{1}$$

— какая-нибудь пара сопряженных корней знаменателя $\psi(x)$ кратности n, и пусть ax^2+bx+c — множитель, соответствующий этим корням. В таком случае

$$\psi(x) = (ax^2+bx+c)^n\psi_1(x), \tag{2}$$

где $\psi_1(x)$ — произведение всех остальных множителей. Ясно, что $\psi_1(x)$ — некоторый многочлен тоже с действительными коэфициентами, заведомо не обращающийся в нуль при $x=x_1$ и при $x=x_2$:

$$\psi_1(x_1)\neq 0, \quad \psi_1(x_2)\neq 0. \tag{3}$$

Заметив это, рассмотрим данную функцию

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)}. \tag{4}$$

Каковы бы ни были постоянные M и N, мы можем написать равенство:

$$\frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)} = \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)} = \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{\varphi(x)-(Mx+N)\psi_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)}. \tag{5}$$

Посмотрим, нельзя ли подобрать M и N так, чтобы числитель второй дроби

$$\varphi(x)-(Mx+N)\psi_1(x) \tag{6}$$

делился нацело на квадратный трехчлен в скобках. Так как

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

то для этого достаточно и необходимо, чтобы числитель (6) делился без остатка как на $x-x_1$, так и на $x-x_2$, т. е. по теореме Безу необходимо и достаточно, чтобы x_1 и x_2 были его корнями. Следовательно, мы должны исследовать, можно ли подобрать M и N так, чтобы одновременно иметь равенства:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1)-(Mx_1+N)\psi_1(x_1)=0,\\ \varphi(x_2)-(Mx_2+N)\psi_1(x_2)=0.\end{aligned} \tag{7}$$

Перепишем их в такой форме:

$$\begin{aligned}Mx_1+N=\frac{\varphi(x_1)}{\psi_1(x_1)},\\ Mx_2+N=\frac{\varphi(x_2)}{\psi_1(x_2)},\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$x_1=p+qi, \quad x_2=p-qi.$$

Пусть

$$\frac{\varphi(x_1)}{\psi_1(x_1)}=\frac{\varphi(p+qi)}{\psi_1(p+qi)}=P+Qi. \tag{9}$$

Относительно P и Q нам достаточно только знать, что они некоторые действительные числа.

Так как коэфициенты многочленов $\varphi(x)$ и $\psi_1(x)$ действительны, то если мы в выражении $\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}$ заменим x двумя сопряженными значениями, тогда полученные результаты должны быть тоже сопряженны. Поэтому рядом с равенством (9) необходимо будем иметь равенство:

$$\frac{\varphi(x_2)}{\psi_1(x_2)}=\frac{\varphi(p-qi)}{\psi_1(p-qi)}=P-Qi. \tag{10}$$

Теперь равенства (8) можно переписать в такой форме:

$$\begin{aligned}M(p+qi)+N=P+Qi,\\ M(p-qi)+N=P-Qi.\end{aligned}$$

Складывая и вычитая их, получим:

$$\begin{aligned}Mp+N=P,\\ Mq=Q,\end{aligned}$$

откуда

$$M=\frac{Q}{q}, \quad N=P-\frac{pQ}{q}. \tag{11}$$

Оказывается, что желаемые M и N можно найти. Важно отметить, что получаемые для них значения действительны.

Взяв M и N такими, как они определяются равенствами (11), мы из (5) получим:

$$\frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)}=\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}\psi_1(x)}, \quad (12)$$

где

$$\varphi_1(x)=\frac{\varphi(x)-(Mx+N)}{ax^2+bx+c}, \quad (13)$$

причем числитель правой части делится на знаменатель без остатка, а потому $\varphi_1(x)$—многочлен. Получается

***Лемма.* Если $\varphi(x)$ и $\psi_1(x)$ — многочлены с действительными коэфициентами и если квадратный трехчлен ax^2+bx+c, тоже с действительными коэфициентами, имеет мнимые корни, которые не являются корнями многочлена $\psi_1(x)$, то всегда можно найти такие постоянные M и N и притом действительные, что**

$$\frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)}=\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}\psi_1(x)},$$

где $\varphi_1(x)$ — некоторый многочлен с действительными коэфициентами.

Но ту же лемму мы можем применить и ко второму слагаемому правой части и т. д. Применяя ее несколько раз и обозначая через R квадратный трехчлен:

$$R=ax^2+bx+c,$$

получим равенства:

$$\frac{\varphi(x)}{R^n\psi_1(x)}=\frac{Mx+N}{R^n}+\frac{\varphi_1(x)}{R^{n-1}\psi_1(x)},$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{R^{n-1}\psi_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{R^{n-1}}+\frac{\varphi_2(x)}{R^{n-2}\psi_1(x)},$$

. . . .

$$\frac{\varphi_{n-2}(x)}{R^2\psi_1(x)}=\frac{M_{n-2}x+N_{n-2}}{R^2}+\frac{\varphi_{n-1}(x)}{R\psi_1(x)},$$

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{R\psi_1(x)}=\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{R}+\frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)}.$$

Сложим эти равенства; получается

***Лемма.* Если $\psi_1(x)$ не обращается в нуль при корнях трехчлена, то**

$$\frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)}=\frac{Mx+N}{R^n}+\frac{M_1x+N}{R^{n-1}}+\ldots+$$
$$+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{R}+\frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)},$$

где M, N, ..., N_{n-1} — постоянные и $\varphi_n(x)$ — некоторый многочлен.

Мы видим, что каждому квадратному многочлену соответствуют в разложении элементарные дроби второго типа.

Если окажется, что многочлен $\psi_1(x)$ тоже содержит некоторый множитель второй степени:

$$\psi_1(x) = (a'x^2 + b'x + c')^m \psi_2(x),$$

то выражение $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)}$ мы также могли бы разложить, причем у нас появились бы элементарные дроби вида:

$$\frac{P_k x + Q_k}{(a'x^2 + b'x + c')^k}.$$

Теперь ясно, что в разложении рациональной функции каждому действительному корню соответствуют элементарные дроби первого рода, а каждой паре сопряженных корней—элементарные дроби второго рода, а отсюда вытекает следующая

Теорема. **Если**

$$(\psi x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (a'x^2 + b'x + c')^n \ldots (a^{(k)}x^2 + b^{(k)}x + c^{(k)})^m,$$

то рациональная функция $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ может быть разложена на сумму некоторого многочлена, ее целой части, и элементарных дробей первого и второго типов по следующей схеме:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = F(x) +$$

$$+ \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} +$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{Mx+N}{(a'x^2+b'x+c')^n} + \frac{M_1x+N_1}{(a'x^2+b'x+c')^{n-1}} + \ldots + \frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{(a'x^2+b'x+c')} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{Px+Q}{(a^{(k)}x^2+b^{(k)}x+c^{(k)})^m} + \frac{P_1x+Q_1}{(a^{(k)}x^2+b^{(k)}x+c^{(k)})^{m-1}} + \ldots + \frac{P_{m-1}x+Q_{m-1}}{(a^{(k)}x^2+b^{(k)}x+c^{(k)})}.$$

Но интеграл от каждого слагаемого правой части может быть вычислен, а потому может быть вычислен и интеграл от левой части.

Вспомнив теперь, что интеграл от элементарной дроби второго рода выражается через логарифмические и круговые функции, мы можем высказать следующее положение, основное в теории интегрирования рациональных функций:

Интеграл от всякой рациональной функции может быть вычислен. В случае только действительных корней знаменателя он выражается только через алгебраические функции и логарифмические, к которым, в случае мнимых корней, присоединяется круговая функция аркус-тангенс.

Для фактического вычисления интеграла рациональной функции ее прежде всего необходимо разложить на элементарные дроби, для чего

необходимо вычислить коэфициенты разложения. Это их вычисление, как и в случае только действительных корней, может быть произведено или методом произвольных значений, или методом сравнения коэфициентов.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{11x+1}{(x+3)(2x^2+x+1)}\,dx.$$

Вычислим его методом произвольных значений. Согласно теории пишем:

$$\frac{11x+1}{(x+3)(2x^2+x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{2x^2+x+1}, \tag{14}$$

где A, B, C нам пока неизвестны. Приводя (14) к общему знаменателю, имеем:

$$11x+1 = A(2x^2+x+1)+(Bx+C)(x+3). \tag{15}$$

Это равенство справедливо при всяком x. Так как у нас три неизвестных A, B, C, то для определения их нам нужны три уравнения. Поэтому даем x в (15) три каких-нибудь значения, конечно, таких, чтобы вычисления были по возможности проще. Полагая, например, сначала $x=0$, затем $x=1$ и, наконец, $x=-1$, найдем три уравнения:

$$1=A+3C;\quad 12=4A+4B+4C;\quad -10=2A-2B+2C,$$

откуда

$$A=-2;\quad B=4;\quad C=1,$$

а потому

$$\int \frac{(11x+1)\,dx}{(x+3)(2x^2+x+1)} = \int \left\{-\frac{2}{x+3}+\frac{4x+1}{2x^2+x+1}\right\} dx =$$
$$= -2\ln|x+3| + \ln|2x^2+x+1| + C.$$

Вычислим методом сравнения коэфициентов интеграл

$$\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx.$$

Согласно теории пишем

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

После приведения к общему знаменателю имеем:

$$2x^3+x^2+5x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+3).$$

Раскрываем в правой части скобки и потом располагаем по степеням x. Имеем:

$$2x^3+x^2+5x+1 = (A+C)x^3+(-A+B+D)x^2+$$
$$+(A-B+3C)x+B+3D.$$

При одинаковых степенях x коэфициенты правой части равны коэфициентам левой. Получаем уравнения:

$$A+C=2;\quad -A+B+D=1;\quad A-B+3C=5;\quad B+3D=1,$$

откуда

$$A=0, \quad B=1, \quad C=2, \quad D=0,$$

а потому

$$\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx = \int\left\{\frac{1}{x^2+3}+\frac{2x}{x^2-x+1}\right\}dx =$$

$$= \int\left\{\frac{1}{x^2+3}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln|x^2-x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пусть требуется вычислить интеграл

$$G = \int \frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx.$$

Корни множителя x^2+x+1 мнимы. Поэтому пишем

$$\frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и располагая правую часть по степеням x, имеем

$$x^4+2x^3+x^2+x+1 = Ax^4+(2A+D)x^3+(3A+B+D+E)x^2+$$
$$+(2A+C+D+E)x+A+E.$$

Сравнивая коэфициенты при одинаковых степенях x, найдем, что

$$A=1, \quad B=-2, \quad C=-1, \quad D=0, \quad E=0,$$

а потому

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Во втором интеграле правой части числитель равен производной от трехчлена. Поэтому, вычисляя его подстановкой, окончательно найдем, что

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{x^2+x+1} + C.$$

§ 83. Заключение.

Интеграл от всякой рациональной функции может быть вычислен.

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ.

Возможность вычислить интеграл от всякой рациональной функции дает новый метод интегрирования, так называемый метод рационализации.

Пусть дан интеграл

$$\int \varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Полагая $x=\psi(t)$, имеем

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi[\psi(t)]\cdot\psi'(t)\,dt. \tag{2}$$

Если мы сумеем выбрать функцию $\psi(t)$ так, чтобы подъинтегральная функция в интеграле правой части (2) была рациональной, то тогда мы можем вычислить этот интеграл. Тем самым будет вычислен и интеграл (1). В таком случае говорят, что он вычислен методом рационализации. Следовательно,

метод рационализации заключается в том, что данный интеграл вычисляют, преобразовывая его соответствующей подстановкой в интеграл от рациональной функции.

Так, например, если

$$G=\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)},$$

то, полагая $x=t^2$, имеем

$$G=2\int \frac{dt}{1+t^2}.$$

Мы получили интеграл от рациональной функции, а потому мы можем его вычислить. Тем самым и данный интеграл будет вычислен методом рационализации. Очевидно, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{x}+C.$$

Ниже мы рассмотрим ряд классов функций, как алгебраических, так и трансцендентных, интегралы от которых могут быть вычислены методом рационализации.

§ 84. Предварительные замечания.

В дальнейшем под обозначением

$$f(u, v, \ldots, w)$$

мы постоянно будем разуметь рациональную функцию от аргументов. Следовательно, символ f будет служить символом некоторой совокупности

только рациональных действий, т. е. действий сложения, вычитания, умножения, деления и возвышения в целую положительную или отрицательную степень. При этом, когда мы говорим о действиях, обозначенных символом f, то мы разумеем те действия, необходимые для построения функции, которые производятся только над переменными или над переменными и постоянными. Но не принимаются во внимание действия, производимые только над одними постоянными числами, потому что, если такие действия и входят в выражение функции, то числа, получаемые в результате их, рассматриваются как данные числа. Например, если

$$f(u, v, w)=\frac{\sqrt{2}\cdot u+(\lg 3)w}{v+\sqrt{5}},$$

то $f(u, v, w)$—рациональная функция, хотя в правой части мы и видим символы извлечения корня и логарифмирования. Но числа

$$\sqrt{2},\quad \lg 3,\quad \sqrt{5}$$

рассматриваются как уже данные числа, а не как числа, которые еще надо найти через соответствующие действия. Если мы их обозначим через a, b, c, то будем иметь

$$f(u, v, w)=\frac{au+bw}{v+c},$$

и ясно, что $f(u, v, w)$ — рациональная функция.

Если в рациональной функции

$$f(u, v, \ldots, w)$$

ее аргументы заменить некоторыми функциями

$$\varphi(x),\quad \psi(x), \ldots,\quad \omega(x),$$

то получаемая функция

$$f[\varphi(x), \psi(x), \ldots, \omega(x)] \tag{1}$$

называется функцией, рациональной относительно функций

$$\varphi(x),\quad \psi(x), \ldots,\quad \omega(x).$$

Но, конечно, функция (1) как функция переменного x может при этом и не быть рациональной. Так, например, если

$$f(u, v, w)=\frac{u^2+2v^3}{1+w},$$

то

$$f(\sin x, \cos x, e^x)=\frac{\sin^2 x+2\cos^3 x}{1+e^x}. \tag{2}$$

Как функция от x эта функция трансцендентная. Но она рациональна относительно функций

$$\sin x,\quad \cos x \text{ и } e^x \tag{3}$$

потому что, чтобы получить ее, над величинами (3) надо производить только рациональные действия.

Для дальнейшего очень важно отметить, что

если как функция

$$f(u, v, \ldots, w),$$

так и функции

$$\varphi(x), \quad \psi(x), \ldots, \quad \omega(x) \tag{4}$$

все рациональны, то функция

$$f[\varphi(x), \psi(x), \ldots, \omega(x)] \tag{5}$$

как функция от x тоже необходимо рациональная функция.

Потому что, чтобы получить функцию (5), надо сначала получить функции (4). Но эти функции по условию получаются только с помощью рациональных действий. Потом над ними надо произвести совокупность действий, обозначенных символом f. Но эти действия тоже рациональны. Таким образом, чтобы получить функцию (5), над x надо производить только рациональные действия. Следовательно, она рациональна. Так, например, если $f(u, v)$ — рациональная функция от u и v, то функция

$$f\left(\frac{3+\sqrt{2}t}{1-t}, \quad \frac{7+8t}{9-t^3}\right)$$

есть тоже рациональная функция t.

§ 85. Интегралы типа A.

Интегралом типа A мы назовем всякий интеграл типа

$$G=\int f\left(x^{\frac{h}{q}}, x^{\frac{n'}{q'}}, \ldots, x^{\frac{r}{g}}\right) dx,$$

подъинтегральная функция которого есть рациональная функция от дробных степеней переменного.

Пусть показатели после приведения их к общему знаменателю соответственно равны

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{s}{n}, \ldots, \frac{k}{n}.$$

Тогда имеем

$$G=\int f\left(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{s}{n}}, \ldots, x^{\frac{k}{n}}\right) dx.$$

Если произведем теперь подстановку

$$x=y^n,$$

то получим

$$G=\int n y^{n-1} f(y^m, y^s, \ldots, y^k)\, dy.$$

В правой части подъинтегральная функция рациональна, а потому **интегралы типа A всегда могут быть вычислены методом рационализации.**

Пусть, например, имеем

$$K=\int \frac{x^2 \sqrt{x}\, dx}{x^4+\sqrt[3]{x^2}+1}.$$

Ясно, что, чтобы не иметь дробных показателей, надо принять

$$x = y^6.$$

Тогда получим

$$K = \int \frac{6y^{20}dy}{y^{24} + y^4 + 1},$$

и интеграл K приведен к интегралу от рациональной функции. Следовательно, его можно вычислить. Но практически это вычисление, очевидно, произвести не так-то легко. Сколько времени и труда надо затратить, чтобы вычислить с достаточным приближением 24 корня знаменателя, а потом разложить на элементарные дроби! По этому поводу заметим, что, как правило, метод рационализации приводит к интегралам от сложных рациональных функций. Поэтому в дальнейшем мы часто будем ограничиваться только указанием, как интеграл рассматриваемого типа может быть приведен к интегралу от рациональной функции, само же интегрирование этой функции или не будем производить, или, если и будем, то на примерах, подобранных так, чтобы вычисления не были очень утомительны.

§ 86. Интегралы типа В.

Всякое выражение вида

$$\frac{ax + b}{lx + k},$$

т. е. всякое частное двух линейных многочленов, называется дробно-линейной функцией.

Интегралом типа В мы назовем всякий интеграл вида

$$H = \int f\left[x, \left(\frac{ax + b}{lx + k}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax + b}{lx + k}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\right] dx, \tag{1}$$

т. е. всякий интеграл от функции, рациональной относительно переменного x и относительно дробных степеней одной и той же дробной линейной функции.

Например, интеграл

$$\int \left[\frac{2x^3 + 5}{3x^7 + x + 4} - \sqrt[3]{\left(\frac{2x - 11}{13x + q}\right)^4}\right] dx$$

есть интеграл типа В.

Интегралы этого типа легко приводятся к интегралам предыдущего типа А. Полагаем

$$\frac{ax + b}{lx + k} = z,$$

откуда

$$x = \frac{kz - b}{a - lz}, \quad dx = -\frac{(bl - ka)\,dz}{(a - lz)^2},$$

а потому

$$H=\int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{p}{q}}\right]dx=$$

$$=\int \frac{(ka-bl)}{(lz-a)^2} f\left(\frac{kz-b}{a-lz}, \; z^{\frac{m}{n}}, \ldots, z^{\frac{p}{q}}\right) dz,$$

и в правой части—интеграл типа A, т. е. от рациональной функции от z и его дробных степеней. Поэтому подстановкой

$$z=y^g,$$

где g — общий наименьший знаменатель показателей, интеграл H приведется к интегралу от рациональной функции.

В частном случае при $l=0$, $k=1$ интеграл (1) дает интеграл более простого типа

$$\int f[x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{p}{q}}]\, dx,$$

который при $a=1$ и $b=0$ обращается в интеграл

$$\int f(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}})\, dx,$$

т. е. в интеграл типа A. Следовательно, всякий интеграл типа A есть частный случай интеграла типа B.

Если квадратный трехчлен

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

имеет действительные корни α и β, то интеграл типа

$$C=\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$$

легко приводится к типу B. Действительно, имеем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\pm(x-\alpha)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}},$$

где надо взять знак плюс, если $x>\alpha$ и знак минус, если $x<\alpha$, а потому

$$C=\int f\left[x, \pm(x-\alpha)\left(\frac{ax-a\beta}{x-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right] dx,$$

и имеем интеграл типа B, а именно интеграл от рациональной функции от x и рациональной степени дробной степени линейной функции.

Вычислим, например, интеграл

$$G=\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$$

Теперь полагаем

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=y,$$

откуда

$$x=\frac{y^2-1}{y^2+1}, \quad dx=\frac{4y\,dy}{(y^2+1)^2}.$$

Получим:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{y^2+1}{y^2}dy=\frac{y^2-1}{2y}+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

Но заметим, что этот интеграл было бы проще вычислить подстановкой $x=\sin t$.

Действительно, имеем:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\operatorname{tg} t+C,$$

и так как

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

то получаем прежний результат, но только быстрее.

§ 87. Интеграл типа C.

Интегралом типа C назовем всякий интеграл

$$C=\int f(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

где подъинтегральная функция рациональна относительно независимого переменного и квадратного корня из квадратного трехчлена от независимого переменного.

Полагая для сокращения письма

$$R=ax^2+bx+c, \tag{1}$$

имеем

$$C=\int f(x,\ \sqrt{R})\,dx. \tag{2}$$

Эйлер указал три подстановки, с помощью которых интеграл C может быть преобразован в интеграл от рациональной функции. Эти подстановки называются подстановками Эйлера. Чтобы получить первую из них, Эйлер полагает

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t \tag{3}$$

и ищет из этого уравнения выражение для x как функции t. По возведении в квадрат последовательно получаем:

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

$$bx+c=2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}. \tag{4}$$

Это и есть искомая подстановка. Действительно, диференцируя (4), найдем

$$dx = -2\frac{\sqrt{a}t^2 - bt + c\sqrt{a}}{(b - 2\sqrt{a}t)^2}dt. \tag{5}$$

Чтобы вычислить $\sqrt{R}$, было бы нецелесообразно заменять в подкоренном количестве x его выражением через t. Получилось бы очень сложное выражение. Проще и естественней заменить x в правой части (3). Делая это, получим:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 - bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t - b}. \tag{6}$$

Принимая во внимание (4), (5) и (6), имеем

$$C = -\int f\left(\frac{c - t^2}{2\sqrt{a}t - b}, \frac{\sqrt{a}t^2 - bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t - b}\right)\cdot 2\frac{\sqrt{a}t^2 - bt + c\sqrt{a}}{(b - 2\sqrt{a}t)^2}dt.$$

В правой части под интегралом стоит функция, рациональная относительно t, а потому интеграл C может быть вычислен.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$H = \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Равенства (5) и (6) дают

$$H = \int\frac{2\,dt}{b - 2\sqrt{a}t} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|b - 2\sqrt{a}t| + C.$$

Заменяя t его выражением из (3) через x, окончательно получим:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|b + 2\sqrt{a}x - 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C. \tag{7}$$

В частном случае, полагая $a = 1$, $b = 0$, имеем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = -\ln|2x - 2\sqrt{x^2 + c}| + C = \ln\left|\frac{1}{2x - 2\sqrt{x^2 + c}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + c}}{-2c}\right| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + c}| - \ln|2c| + C.$$

Обозначая неопределенное постоянное $-\ln|2c| + C$ через C', получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{c + x^2}} = \ln|x + \sqrt{c + x^2}| + C'.$$

Как раз в такой форме этот интеграл был нами помещен в таблице основных интегралов.

Можно догадываться о том пути, который привел Эйлера к его подстановке. Нам надо найти такую рациональную функцию $\varphi(t)$, чтобы $\sqrt{R}$ после подстановки $x=\varphi(t)$ тоже выразился рационально через t. Поэтому пробуем принять $\sqrt{R}$ равным простейшей линейной функции от x и t, т. е. пробуем положить

$$\sqrt{R}=px+qt, \tag{8}$$

откуда следует

$$ax^2+bx+c=p^2x^2+2pqxt+q^2t^2. \tag{9}$$

Пока это уравнение остается квадратным, x не будет выражаться рационально через t. Это возможно только тогда, когда уравнение (9) обратится в уравнение первой степени, для чего необходимо, чтобы члены ax^2 и p^2x^2 сократились. Для этой цели надо взять

$$p=\pm\sqrt{a},$$

что мы и сделали. Для q же взяли простейшее значение: $q=1$. Теперь ясно, что в правой части (3) можно $\sqrt{a}$ взять и со знаком минус. Также и t можно взять с любым коэфициентом. Поэтому первую подстановку можно представить в такой самой общей форме:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+qt, \tag{10}$$

где q и знак перед $\sqrt{a}$ можно брать произвольно. После возведения в квадрат получим относительно x уравнение первой степени.

Если a отрицательно, то подстановка (10) уже неприменима, так как $\sqrt{a}$ будет мнимым числом. В этом случае можно воспользоваться второй подстановкой Эйлера. К понятию ее придем так. Квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0$$

приводится к уравнению первой степени не только тогда, когда $a=0$, но и тогда, когда нулю равен свободный член, потому что при $c=0$ получаем

$$x(ax+b)=0.$$

Приняв это во внимание, мы найдем вторую подстановку Эйлера, если $\sqrt{R}$ примем равным такому выражению, чтобы после возвышения в квадрат исчез свободный член. Для этой цели полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+xt. \tag{11}$$

По возведении в квадрат получаем

$$ax^2+bx+c=c+2\sqrt{c}\,xt+x^2t^2.$$

После сокращения сначала на c, потом на x имеем

$$ax+b=2\sqrt{c}\,t+xt^2,$$

откуда последовательно

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}; \quad dx=2\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt,$$

и из (11) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2},$$

а потому
$$\int f(x, \sqrt{R})\,dx=$$
$$=2\int f\left(\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2},\ \frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\,dt,$$

и в правой части — интеграл от рациональной функции.

Ясно теперь, что вторую подстановку можно представить в такой общей форме:
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt.$$

Она может быть применена только при $c>0$. Первая же — если $a>0$. Следовательно, если одновременно
$$a<0 \quad \text{и} \quad c<0,$$

то ни одна из рассмотренных подстановок не может быть применена.

В этом случае, как увидим, может быть применена третья подстановка Эйлера.

Заметим, что если $a<0$, то мы должны считать корни квадратного трехчлена действительными, потому что, если допустим, что они мнимы, то
$$4ac-b^2>0, \tag{12}$$
$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+4ac-b^2]. \tag{13}$$

Скобка в правой части, благодаря (12), необходимо положительна. Поэтому левая часть, т. е. сам квадратный трехчлен, если $a<0$, отрицателен при всяком x. Но в таком случае под знаком квадратного корня получается отрицательное число и тем самым появляются мнимые числа. Так как мы их избегаем, то случай, когда при $a<0$ наш трехчлен имеет мнимые корни, можно исключить из нашего рассмотрения. Поэтому в дальнейшем предположим, что корни x_1 и x_2 трехчлена действительны. В таком случае
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где в правой части действительные линейные многочлены.

Мы предположим, что квадратный многочлен разложен на множители более общего типа, а именно пусть
$$ax^2+bx+c=(px+q)(mx+n).$$

Тогда третью подстановку Эйлера получим, полагая
$$\sqrt{(px+q)(mx+n)}=(px+q)t. \tag{14}$$

После возвышения в квадрат имеем
$$(px+q)(mx+n)=(px+q)^2t^2.$$

Сокращение на $px+q$ дает уравнение

$$mx+n=(px+q)t^2,$$

которое первой степени относительно x. Из него находим

$$x=\frac{qt^2-n}{m-pt^2}, \tag{15}$$

а потому

$$dx=\frac{2(mq-np)t}{(m-pt^2)^2}dt, \tag{16}$$

и из (14)

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{(mq-pn)t}{m-pt^2}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=\int f\left(\frac{qt^2-n}{m-pt^2}, \frac{(mq-pn)t}{m-pt^2}\right)\cdot\frac{2(mq-np)t}{(m-pt^2)^2}dt,$$

и в правой части — интеграл от рациональной функции.

В результате мы видим, что

интеграл типа

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

где f — характеристика рациональной функции, может быть вычислен методом рационализации с помощью одной из следующих трех подстановок Эйлера:

$$1)\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x\pm t,\quad a>0;$$
$$2)\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt,\quad c>0;$$
$$3)\ \sqrt{(px+q)(mx+n)}=(px+q)t.$$

Теоретически безразлично, какой знак в правых частях брать перед $\sqrt{a}$ и $\sqrt{c}$; также и в третьей подстановке при t можно взять любой из линейных множителей. Но это только теоретически. На практике выбор того или иного знака или того или иного множителя ведет обычно или к более простым вычислениям, или, наоборот, очень их усложняет. Вообще же заметим, что, как правило, эйлеровы подстановки требуют длинных вычислений. Поэтому **к эйлеровым подстановкам надо прибегать только в тех случаях, когда в нашем распоряжении нет других методов.**

§ 88. Интеграл от диференциального бинома.

Диференциальным биномом называется всякое выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p dx.$$

Показатели m, n, p будем называть первым, вторым и третьим.

Интеграл от диференциального бинома

$$S=\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

легко вычисляется в том случае, когда показатель p — целое и положительное число. Действительно, в этом случае, применяя бином Ньютона, имеем

$$S=\int x^m (a+bx^n)^p\,dx=\int x^m\Big(a^p+pa^{p-1}bx^n+\frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2x^{2n}+\\+\ldots+b^px^{np}\Big)\,dx=a^p\int x^m dx+pa^{p-1}b\int x^{m+n}dx+\\+\frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2\int x^{m+2n}dx+\ldots+b^p\int x^{m+np}dx.$$

Каждый интеграл правой части может быть легко вычислен как интеграл от степенной функции, а потому может быть вычислен и интеграл S. Например,

$$\int\frac{(2+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\Big(2+x^{\frac{1}{2}}\Big)^3dx=\int\big(8x^{-\frac{1}{2}}+12+6x^{\frac{1}{2}}+x\big)\,dx=\\=16\sqrt{x}+12x+4x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C.$$

В дальнейшем будем предполагать показатели m, n, p рациональными. В таком случае нетрудно видеть, что интеграл

$$S=\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

может быть вычислен и в том случае, когда показатель p — целое отрицательное число. Действительно, пусть

$$p=-p'$$

и пусть показатели m и n, вообще дробные, после приведения их к общему знаменателю, представятся в форме:

$$m=\frac{m'}{g},\quad n=\frac{n'}{g},$$

где g, m', n' — уже целые числа, быть может и отрицательные. Имеем

$$S=\int x^{\frac{m'}{g}}\big(a+bx^{\frac{n'}{g}}\big)^{-p'}dx.$$

Полагая

$$x=z^g,$$

легко найдем

$$S=\int\frac{gz^{m'+g-1}dz}{(a+bz^{n'})^{p'}}.$$

Так как подъинтегральная функция теперь рациональная, то интеграл может быть вычислен. В результате заключаем:

Если все показатели рациональны, то интеграл

$$S=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \qquad (1)$$

всегда может быть вычислен в том случае, когда показатель p — целое число, положительное или отрицательное.

Этот случай назовем основным. Кроме него, нетрудно теперь найти еще два случая, когда интеграл S может быть вычислен.

Естественно испробовать подстановку

$$a+bx^n=y, \tag{2}$$

откуда

$$x=\frac{(y-a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}, \quad dx=\frac{(y-a)^{\frac{1}{n}-1}}{nb^{\frac{1}{n}}}dy.$$

Легко найдем, что

$$S=\frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int y^p(-a+y)^{\frac{m+1}{n}-1}dy. \tag{3}$$

Под интегралом опять стоит диференциальный бином, только с другими показателями. По только что доказанному интеграл (3) может быть вычислен, если третий показатель

$$\frac{m+1}{n}-1 \tag{4}$$

— целое число. Но он будет таковым, если $\frac{m+1}{n}$ — целое число. Заключаем:

Интеграл S может быть вычислен, если $\frac{m+1}{n}$ — целое число.

Этот случай назовем вторым случаем интегрируемости.

Третий случай интегрируемости получим, если вынесем из скобок x^n. Так как

$$x^m(a+bx^n)^p=x^{m+pn}(ax^{-n}+b)^p,$$

то имеем

$$S=\int x^{m+pn}(b+ax^{-n})^p\,dx. \tag{5}$$

Согласно второму случаю этот интеграл может быть вычислен, если

$$\frac{m+pn+1}{n}=\frac{m+1}{n}+p=\text{целое число}. \tag{6}$$

Это — третий случай интегрируемости. Согласно (2) и (3) он приводится к основному подстановкой:

$$b+ax^{-n}=y.$$

Мы теперь можем высказать следующее заключение:

Интеграл

$$S=\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

если все показатели рациональны, может быть вычислен в следующих так называемых трех случаях интегрируемости:

1) p — целое число,

2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число (подстановка $a+bx^n=y$),

3) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число (подстановка $ax^{-n}+b=y$).

Академиком Чебышевым было доказано, что, кроме этих трех случаев, никаких других нет, когда интеграл может быть вычислен.

Заметим, что если p дробное, то числа

$$\frac{m+1}{n} \quad \text{и} \quad \frac{m+1}{n}+p$$

не могут быть одновременно оба целыми, а потому оба случая, второй и третий, не могут иметь место одновременно.

§ 89. Интегралы от трансцендентных функций.

Мы рассмотрели те классы алгебраических функций, интегралы которых могут быть вычислены. Число таких классов, как мы видим, весьма невелико. Еще хуже обстоит дело с интегралами от трансцендентных функций. Каких-нибудь общих указаний относительно вычисления их нет. Как правило, всякая трансцендентная функция принадлежит к числу неинтегрируемых, и если интеграл от какой-нибудь такой функции и может быть вычислен, то берется он своим, только ему свойственным, методом. Для практических приложений можно указать только один прием: если в подъинтегральном выражении мы встречаем только одну элементарную функцию $\varphi(x)$, то надо испробовать подстановку

$$\varphi(x)=y.$$

Если после этой подстановки интеграл приведется к интегралу от рациональной функции, то он может быть вычислен, если нет, — то, по всей вероятности, не может.

Из интегралов от трансцендентных функций, которые могут быть всегда вычислены таким методом, отметим следующий класс:

Методом рационализации могут быть вычислены интегралы следующего типа:

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — рациональная функция и $\varphi(x)$ — какая угодно функция.

Действительно, полагая

$$\varphi(x)=z,$$

откуда

$$\varphi'(x)\,dx=dz,$$

имеем

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx=\int f(z)\,dz,$$

и в правой части — интеграл от рациональной функции.

В частном случае, принимая за $\varphi(x)$ различные элементарные функции, мы приходим к почти очевидному заключению:

Методом рационализации могут быть вычислены интегралы от трансцендентных функций следующего

типа, где f — характеристика рациональной функции одного аргумента:

1) $\int f(e^x)\,dx = \int \frac{f(z)}{z}\,dz, \quad z = e^x;$

2) $\int f(\ln x)\,\frac{dx}{x} = \int f(z)\,dz, \quad z = \ln x;$

3) $\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(z)\,dz, \quad z = \sin x;$

4) $\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(z)\,dz, \quad z = \cos x;$

5) $\int \frac{f(\operatorname{tg} x)\,dx}{\cos^2 x} = \int f(z)\,dz, \quad z = \operatorname{tg} x;$

6) $\int \frac{f(\operatorname{ctg} x)\,dx}{\sin^2 x} = -\int f(z)\,dz, \quad z = -\operatorname{ctg} x;$

7) $\int \frac{f(\arcsin x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(z)\,dz, \quad z = \arcsin x;$

8) $\int \frac{f(\arccos x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int f(z)\,dz, \quad z = \arccos x;$

9) $\int \frac{f(\operatorname{arc\,tg} x)\,dx}{1+x^2} = \int f(z)\,dz, \quad z = \operatorname{arc\,tg} x;$

10) $\int \frac{f(\operatorname{arc\,ctg} x)\,dx}{1+x^2} = -\int f(z)\,dz; \quad z = \operatorname{arc\,ctg} x.$

Действительно, после соответствующей подстановки, в правых частях этой таблицы мы имеем интегралы от рациональных функций.

Так, например, полагая

$$\arcsin x = z,$$

имеем:

$$\int \frac{dx}{[1+2(\arcsin x)^2]\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dz}{1+2z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(z\sqrt{2}) + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\arcsin x) + C.$$

Из других интегралов от трансцендентных функций заслуживают внимания так называемые тригонометрические интегралы.

Тригонометрическим интегралом в широком смысле слова называется всякий интеграл от рациональной функции, аргументами которой служат только тригонометрические функции независимого переменного, т. е. интегралы типа

$$\int f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)\,dx, \tag{1}$$

где f — характеристика рациональной функции.

Но так как
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
то подъинтегральная функция в (1) легко преобразуется в рациональную функцию только от двух аргументов: $\sin x$ и $\cos x$, а потому ниже мы и можем ограничиться только рассмотрением этого случая.

Всякий тригонометрический интеграл
$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx \tag{1}$$
приводится подстановкой
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z \tag{2}$$
к интегралу от рациональной функции.

Действительно, имеем
$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$
$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$
Следовательно,
$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}. \tag{3}$$
Видим, что $\sin x$ и $\cos x$ выражаются рационально через тангенс половины угла. Далее из (2) имеем
$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} z \pm n\pi, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2}. \tag{4}$$
Из (3) и (4) следует
$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx = \int f\left(\frac{2z}{1 + z^2}, \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right) \frac{2dz}{1 + z^2}, \tag{5}$$
и в правой части имеем интеграл от рациональной функции.

Частным случаем интеграла типа (5) являются интегралы типа
$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}, \tag{6}$$
вычисляемые подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$. Интегралы
$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$
очевидно, — частные случаи типа (6).

Но вообще надо заметить, что подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ ведет, как общее правило, к очень длинным вычислениям, а потому к ней надо прибегать только в крайнем случае, когда не видно других путей. Так, например, интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x + C,$$

конечно, может быть вычислен этой подстановкой. Но пусть читатель попробует применить ее.

§ 90. Интегралы типа $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

Эти интегралы в случаях целых показателей принадлежат к классу тригонометрических. Как таковые они могут быть вычислены подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$. Но она в данном случае нецелесообразна.

Будем считать показатели m и n рациональными и рассмотрим, в каких случаях интеграл

$$G=\int \sin^m x \cos^n x\, dx \tag{1}$$

может быть вычислен. Полагая

$$\sin x = z,$$

имеем

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x\, d\sin x = \int z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz.$$

В правой части появился интеграл от диференциального бинома. Имеем три случая его интегрируемости:

1) $\frac{n-1}{2}$ — целое число,

2) $\frac{m+1}{2}$ — целое число,

3) $\frac{m+n}{2}$ — целое число.

Для первого случая необходимо, чтобы n было нечетным числом; во втором случае им должно быть m; в третьем же случае $m+n$ должно быть четным. Заключаем:

Если показатели рациональны, то интеграл типа

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

вычисляется только в том случае, когда или один показатель нечетный, или сумма их четное число.

Следовательно, например, интеграл

$$\int \sqrt{\sin x}\, dx$$

не может быть вычислен, но интеграл

$$\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$$

уже вычисляется через комбинацию элементарных функций в конечном числе, так как для него $m+n=0$, т. е. четное число.

§ 91. Заключение.

Методом рационализации могут быть вычислены интегралы следующих типов, где f — характеристика рациональной функции:

1) интегралы типа

$$A=\int f\left(x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$$

подстановкой $x=y^h$, где h — общий наименьший знаменатель показателей;

2) интегралы типа

$$B=\int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\right) dx$$

подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d}=y;$$

3) интегралы типа

$$C=\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$$

одной из трех подстановок Эйлера:

a) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x\pm t, \quad a>0$

b) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt, \quad c>0$

c) $\sqrt{(mx+n)(px+q)}=\pm(px+q)t;$

4) интегралы типа

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

в трех случаях интегрируемости:

a) p — целое,

b) $\frac{m+1}{n}$ — целое (подстановкой: $a+bx^n=y$);

c) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое (подстановкой: $ax^{-n}+b=y$);

5) интегралы типа

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx,$$

какая бы ни была функция $\varphi(x)$, подстановкой

$$\varphi(x)=y;$$

6) тригонометрические интегралы

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx$$

и подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y;$$

7) интегралы

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

если один показатель нечетный, другой рациональный, или если они оба рациональны и сумма их равна четному числу.

ОБЩИЙ ОБЗОР ТЕОРИИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Мы прошли длинный путь. В течение его рассмотрели значительное число и интегралов и методов интегрирования. Подведем же теперь общий итог, чтобы отчетливо представить себе совокупность тех интегралов, которые могут быть вычислены.

§ 92. Интегралы от рациональных функций.

К классу интегрируемых функций принадлежит прежде всего обширный класс рациональных функций, в частном случае многочлены.

Интеграл от всякой рациональной функции может быть выражен через комбинацию в конечном числе функций алгебраических, логарифмических и круговых.

Это положение является основным в теории интегрирования. Так как интеграл от рациональной функции возможно вычислить только благодаря тому, что всякая рациональная функция может быть разложена на сумму многочлена и элементарных дробей, то всякое движение вперед в теории интегрирования, всякое усовершенствование этой теории тесно связано с упрощением методов разложения.

После того как установлена возможность вычислить интегралы от всякой рациональной функции, естественно возникает метод рационализации. Этод метод дает ряд новых классов интегрируемых функций, алгебраических и трансцендентных. Но, к сожалению, число этих классов очень невелико; от алгебраических функций оно равно только четырем.

§ 93. Интегралы от алгебраических функций.

Если под f разуметь характеристику рациональной функции, то интегралы от алгебраических функций, которые могут быть вычислены, распадаются на четыре класса, а именно:

Могут быть вычислены следующие интегралы от алгебраических функций:

1) интегралы типа A, т. е. типа

$$\int f\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}} \ldots\right) dx;$$

2) интегралы типа B, т. е. типа

$$\int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{p}{q}} \ldots\right) dx;$$

3) интегралы типа С, т. е. типа

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx;$$

4) интегралы типа

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx,$$

т. е. интегралы от диференциального бинома при рациональных показателях в трех случаях интегрируемости.

Этими четырьмя типами и исчерпываются все интегралы от алгебраических функций.

§ 94. Интегралы от трансцендентных функций.

Если $f(x)$ — рациональная функция, то, какая бы ни была функция $\varphi(x)$, интеграл типа

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

всегда может быть вычислен, потому что

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int f(z)\,dz, \quad z=\varphi(x).$$

Но если не принимать во внимание этого слишком тривиального случая, то тогда можно высказать только такое положение:

Из классов трансцендентных функций, интегралы которых могут быть вычислены, известен только один достаточно обширный класс интегралов типа

$$\int f(\sin x, \ \cos x)\,dx,$$

так называемых тригонометрических интегралов.

К этому классу принадлежат интегралы типа

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c},$$

в частном случае интегралы

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Кроме этих никаких более или менее обширных классов интегрируемых трансцендентных функций неизвестно.

Итак, интегралы рациональных функций, интегралы типов А, В, С. интегралы от диференциального бинома, тригонометрические интегралы, — и этим исчерпываются все достаточно обширные классы интегрируемых функций.

§ 95. Отдельные интегралы.

Кроме интегралов более или менее обширных классов функций, конечно, мы можем вычислить ряд отдельных интегралов. Но и они, в сущности, немногочисленны. Это главным образом следующие интегралы от трансцендентных функций:

$$\int \sin^n x\,dx, \quad \int \cos^m x\,dx, \quad \int \operatorname{tg}^n x\,dx,$$

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,dx, \quad \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$$

для целых показателей. Затем совершенно изолированно стоящие интегралы:

$$\int x^n \arcsin x\,dx, \quad \int x^n \arccos x\,dx,$$

$$\int x^n \cos x\,dx, \quad \int x^n \sin x\,dx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx, \quad \int e^{ax} \sin bx\,dx,$$

легко вычисляемые интегрированием по частям, и интегралы типа

$$\int \sin(mx+p)\cos(nx+q)\,dx,$$

вычисляемые методом разложения*).

Конечно, всегда нетрудно придумать интеграл, который можно вычислить каким-нибудь способом, не подходящим ни к каким правилам. Иногда неожиданно берется интеграл от функции, относительно которой этого трудно было бы ожидать. Так, например, интеграл

$$\int e^{\arcsin x}\,dx$$

легко вычислить или интегрированием по частям, или подстановкой $\arcsin x = t$, $x = \sin t$. Но в то же время интеграл

$$\int e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$$

уже не может быть вычислен.

Точно так же в то время как не вычисляется интеграл

$$\int e^{x^2}\,dx,$$

интеграл

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

легко вычисляется подстановкой $x = z^2$.

Как можно вычислить интеграл от заданной функции, когда нет никаких правил для вычисления его? Такая мысль часто тревожит начинающего. Как мы теперь видим, тревожит она его напрасно. Надо только знать классы интегрируемых функций и несколько приемов интегрирования.

---

*) См. задачник, гл. II

§ 96. Дальнейшее развитие теории.

Число классов интегрируемых функций, как мы видели, очень невелико. Можно ли надеяться, что оно в будущем, с развитием теории, увеличится? Эту надежду можно было бы иметь, если бы мы признали, что в настоящее время теория интегрирования находится только в процессе своего развития. Но в действительности это не так. Напротив, мы должны признать, что теория неопределенных интегралов в настоящее время является в известной степени вполне законченной, завершенной теорией. В будущем в ней возможны только некоторые упрощения в изложении отдельных ее деталей — и только. Открытие новых обширных классов интегрируемых функций мало вероятно.

Часто указывают, что интегральное исчисление отличается от диференциального тем, что в то время как интеграл не от всякой функции может быть вычислен, производная любой функции, напротив, может быть вычислена. Но если это утверждение понимать в строгом смысле слова, то оно неверно.

Существует небольшое число так называемых элементарных функций. Это следующие функции:

$$x^m,\ a^x,\ e^x,\ \ln(x)$$

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,$$

$$\arcsin x,\ \arccos x\ \operatorname{arc\,tg} x,\ \operatorname{arc\,ctg} x.$$

Они лежат в основе анализа, особенно его приложений. С помощью комбинаций из них в конечном числе математик стремится выразить различные зависимости между величинами, но эта цель часто от него ускользает, потому что не всякая зависимость может быть выражена только с помощью комбинаций в конечном числе элементарных функций, и *если встречается такой случай, то математик принужден вводить новые* функции.

Когда диференциальное исчисление утверждает, что оно может вычислить производную от всякой функции, то при этом неявно под всякой функцией разумеют только такую функцию, которая составлена из комбинации в конечном числе элементарных функций.

От такой функции мы всегда можем вычислить производную, но не всегда интеграл.

Функции по степени их сложности можно разделить на три обширных класса: рациональные, алгебраические и трансцендентные.

Алгебраической функцией от переменного x называется всякая функция y, определяемая уравнением, которое может быть представлено в форме многочлена от x и y, приравненного нулю. Если этот многочлен относительно y степени n, то функция называется алгебраической класса n.

Пусть

$$z = f(x, y),$$

где y — алгебраическая функция и f — рациональная. В высшей алгебре доказывается, что z как функция x есть тоже алгебраическая функция, т. е. доказывается, что z можно рассматривать тоже как корень некоторого уравнения только между x и z, — уравнения, представленного в форме многочлена, равного нулю.

Самый простой класс алгебраических функций — это первый класс. Сказать, что y — алгебраическая функция первого класса, это значит утверждать, что она удовлетворяет уравнению первой степени относительно y, т. е. уравнению вида

$$\varphi(x)y+\psi(x)=0,$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — многочлены. Отсюда следует, что

$$y=-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

т. е. что алгебраическая функция первого класса есть просто рациональная функция.

Алгебраическая функция второго класса есть функция, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi_1(x)y^2+\varphi_2(x)y+\varphi_3(x)=0,$$

где φ_1, φ_2, φ_3 — многочлены. Поэтому она может быть представлена в форме

$$y=\frac{-\varphi_2(x)\pm\sqrt{\omega(x)}}{2\varphi_1(x).},$$

где $\omega(x)$ — некоторый многочлен, т. е. в форме

$$y=f\left(x,\sqrt{\omega(x)}\right),$$

где f — характеристика рациональной функции. Функции этого типа мы должны рассматривать как идущие по своей сложности первыми после рациональных функций.

Рациональные функции принадлежат к числу интегрируемых функций. После того как мы нашли методы для их интегрирования, естественно перейти к изучению интегралов типа

$$y=\int f\left(x,\sqrt{\omega(x)}\right)dx. \tag{1}$$

Но многочлен $\omega(x)$ может быть различной степени. Если он первой степени, то мы имеем

$$y=\int f\left(x,\sqrt{ax+b}\right)dx. \tag{2}$$

Интеграл этого типа приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $ax+b=t^2$, а потому на нем останавливаться нечего.

Если $\omega(x)$ второй степени, то имеем:

$$y=\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx^2+c}\right)dx.$$

И на интеграле этого типа нам тоже не приходится останавливаться. Он может быть приведен к интегралу от рациональной функции одной из эйлеровых подстановок. Теперь естественно перейти к интегралам типа

$$y=\int f\left(x,\sqrt{\omega(x)}\right)dx,$$

где многочлен $\omega(x)$ третьей или высшей степени. Оказывается, что эти интегралы уже не могут быть выражены через конечное число элементарных функций. Они являются функциями нового типа и как таковые требуют самостоятельного изучения.

Интегралы типа (3)

$$\int f\left(x, \sqrt{\omega(x)}\right) dx,$$

где f — рациональная функция и $\omega(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, называются *эллиптическими интегралами*.

Интегралы же типа

$$\int f\left(x, \sqrt{\omega(x)}\right) dx,$$

где $\omega(x)$ — многочлен степени выше четвертой, называются ультраэллиптическими.

Эллиптические интегралы получили свое название потому, что к интегралам этого типа сводится задача о длине дуги эллипса. Изучение их составляет самостоятельный отдел математики, тесно связанный с функциями, имеющими два периода.

Как эллиптические, так и ультраэллиптические интегралы являются частным случаем алгебраических интегралов.

Алгебраическим интегралом называется всякий интеграл типа

$$\int f(x, y)\, dx,$$

где f — рациональная функция, y — алгебраическая.

Эти интегралы обладают многими весьма замечательными и интересными свойствами. Теория их была заложена и развита трудами великих математиков Абеля, Коши и Римана. Она стоит в тесной связи с теорией функций комплексного переменного.

Мы установили понятие производной и интеграла только для функций действительного переменного. Но эти понятия могут быть перенесены и на функции комплексного переменного. Заслуга такого расширения этих понятий принадлежит французскому математику Коши, заложившему тем самым начала теории функций комплексного переменного. Эта теория является в настоящее время одним из самых интересных и увлекательных отделов математики. Она, между прочим, устанавливает часто неожиданные и очень простые связи между свойствами функций, которые в области действительного переменного являются совершенно изолированными друг от друга.

Только теория функций комплексного переменного дала возможность создать стройную теорию алгебраических функций.

Таким образом, из трех обширных классов функций:

а) рациональных,

б) алгебраических и

с) трансцендентных

свойства интегралов от первых двух классов изучены.

Что касается интегралов от трансцендентных функций, то ввиду неограниченного многообразия их нет возможности построить общую теорию их. По самой сущности дела здесь возможны исследования только отдельных частных случаев.

§ 97. Заключение.

Кроме интегралов от рациональных функций могут быть вычислены интегралы типов:

$$1)\ \int f\left(x, x^{\frac{m}{q}}, \ldots, x^{\frac{p}{n}}\right) dx;$$

$$2)\ \int f\left(x, \ldots, \left(\frac{ax+b}{bx+q}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots\right) dx,$$

$$3)\ \int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,$$

$$4)\ \int x^m (a+bx^n)^p\, dx,$$

$$5)\ \int f(\sin x,\ \cos x)\ dx,$$

где f — символ рациональной функции.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

Мы ввели понятие определенного интеграла как предела суммы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(\xi_k)\ \Delta x_k,$$

и доказали, что если

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Это соотношение между определенным интегралом и неопределенным дает возможность из свойств первообразной легко заключать и о свойствах определенного интеграла. Но так как первообразную мы можем вычислить только в редких случаях, то естественно возникает задача о более глубоком изучении свойств определенного интеграла, чтобы получить возможность заключать о свойствах его только из свойств подъинтегральной функции, не вычисляя ее первообразной. Решению этой задачи и посвящена эта глава.

§ 98. Определение интеграла как предела суммы.

Мы ввели понятие определенного интеграла, опираясь на понятие интегральной суммы.

Интегральной суммой от функции $f(x)$, взятой от нижнего предела a до верхнего предела b и обозначаемой так:

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x,$$

называется сумма, составленная следующим образом: данный интервал (a, b) произвольно взятыми точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ разбивается на подъинтервалы и берется сумма всех тех произведений, которые получатся, если длину каждого подъинтервала (x_k, x_{k+1}) помножить на значение функции $f(x)$ в какой-нибудь точке ξ_k этого подъинтервала. Следовательно,

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x = f(\xi_0)\,(x_1 - a) + f(\xi_1)\,(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})\,(b - x_{n-1})$$

Приведенное определение интегральной суммы применимо ко всякой функции, как прерывной, так и непрерывной. Если же мы предположим данную функцию $f(x)$ непрерывной и построим кривую трапецию, основанием которой служит интервал (a, b) и которая ограничена кривой $y=f(x)$, то, как мы видели, сама интегральная сумма равна сумме элементарных прямоугольников, взятых с соответствующими знаками, а предел ее равен сумме площадей, пробегаемых ординатой кривой при движении ее от a к b. Следовательно,

если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и если число промежуточных точек x_k бесконечно возрастает так, что наибольший промежуток между ними бесконечно умаляется, то интегральная сумма имеет единственный вполне определенный предел.

В дальнейшем, говоря о пределе интегральной суммы, мы, не упоминая явно об этом, всегда будем предполагать, что при переходе к пределу длина наибольшего промежутка между числами x_k стремится к нулю. При этом очень важно отметить, что предел интегральной суммы совершенно не зависит от выбора чисел x_k и ξ_k.

Определенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$, взятым от нижнего предела a до верхнего предела b и обозначаемым так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

называется предел соответствующей интегральной суммы $\sum_a^b f(x)\,\Delta x$. Следовательно, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Исторически прочно вкоренился обычай называть интеграл как предел суммы определенным интегралом. Мы будем его также часто называть „интеграл-сумма".

Если условиться считать площадь положительной, когда она пробегается положительной ординатой в положительном направлении при соответствующем изменении ее знака при изменении как знака ординаты, так и направления ее движения, то, как мы видели, **определенный интеграл**

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

равен сумме площадей, пробегаемых ординатой кривой $y=f(x)$ при движении ее от a к b.

Приведенное определение интеграла теряет смысл, когда $a=b$, поэтому мы вводим новое

Определение. **Интегралы с равными пределами принимаются равными нулю:**

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

Поставим теперь следующую задачу: вывести все основные свойства интеграла, опираясь только на определение его как предела интегральной суммы *).

Так как интеграл (1) есть предел суммы, то все основные свойства определенного интеграла в сущности суть не что иное, как преобразованные свойства суммы.

§ 99. Теорема о перестановке пределов интеграла.

Если переставить между собой пределы интеграла, то интеграл изменит знак:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{1}$$

Обозначим через s и σ те суммы, пределами которых являются интегралы равенства (1), а именно пусть

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim s, \quad \int_b^a f(x)\,dx = \lim \sigma. \tag{2}$$

Если $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ — точки, с помощью которых построена сумма s:

$$s = f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}),$$

то для построения суммы σ мы выберем те же точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, но в обратном порядке, что схематически можно изобразить так:

$$b\,\xi_{n-1}\,x_{n-1}\,\xi_{n-2}\,x_{n-2}\,\xi_{n-1}\,x_{n-1}\ldots x_3\,\xi_2\,x_2\,\xi_1\,x_1\,\xi_0\,a.$$

Поэтому

$$\sigma = f(\xi_{n-1})(x_{n-1} - b) + f(\xi_{n-2})(x_{n-2} - x_{n-1}) + \ldots + f(\xi_0)(a - x_1).$$

Ясно, что сумму σ можем получить, изменив знак слагаемых и их порядок в сумме s, а потому $s = -\sigma$, откуда $\lim s = -\lim \sigma$, и мы имеем (1).

Теорема доказана. Геометрический смысл ее, очевидно, заключается в том, что при изменении направления движения ординаты знак площади, описываемой ею, тоже меняется.

§ 100. Теорема о выносе постоянного множителя.

Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла, а потому и вносить:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

*) Поэтому при дальнейшем изучении этой главы читатель должен стать на ту точку зрения, что ему об определенном интеграле ничего неизвестно, кроме того, что изложено в этом параграфе, т. е. что определенный интеграл есть предел интегральной суммы.

Действительно, чтобы помножить сумму на какое-нибудь число, надо помножить на это число каждое слагаемое. Поэтому

$$A\sum_{a}^{b} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{a}^{b} Af(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Переходя к пределу, имеем

$$A\lim\sum_{a}^{b} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \lim\sum_{a}^{b} Af(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Заменяя предел каждой суммы соответствующим интегралом, получим равенство (1), и теорема доказана.

§ 101. Теорема о делении интервала интеграции.

Каково бы ни было c, всегда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

при условии, что функция $f(x)$ непрерывна в каждом интервале интеграции.

Мы предположим сначала, что $a < b$ и что c — число промежуточное между ними: $a < c < b$.

Когда мы вставляем промежуточные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ между a и b, то мы их можем брать произвольно. Будем же при каждом делении интервала (a, b) брать среди них и число c. Пусть при каком-нибудь делении $x_h = c$. Имеем:

Черт. 81.

$$\sum_{a}^{b} f(x)\,dx = \{f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{h-1})(c - x_{h-1})\} +$$
$$+ \{f(\xi_h)(x_{h+1} - c) + f(\xi_{h+1})(x_{h+2} - x_{h+1}) + \ldots + f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1})\}.$$

Это равенство можно переписать в такой форме:

$$\sum_{a}^{b} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{a}^{c} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_{c}^{b} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

а потому

$$\lim\sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x = \lim\sum_{a}^{c} f(x)\,\Delta x + \lim\sum_{c}^{b} f(x)\,\Delta x,$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

и теорема доказана для случая $a<c<b$. Но c может лежать не только между a и b, но или левее a или правее b. Если $c<a<b$, то a промежуточно между c и b, а потому по доказанному

$$\int_c^b f(x)\,dx=\int_c^a f(x)\,dx+\int_a^b f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_c^a f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

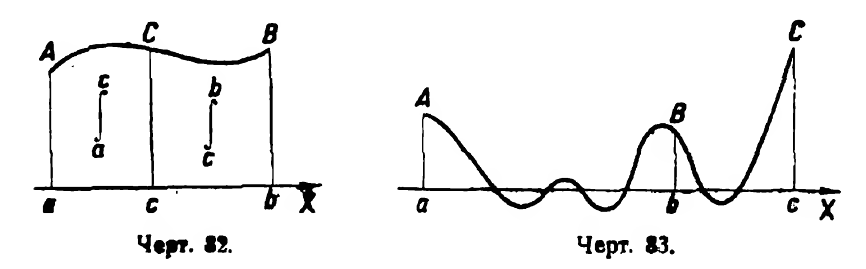
Переставляя пределы a и c, снова получим равенство (1). Если теперь $a<b<c$, то по доказанному

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx,$$

откуда опять

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Итак, это равенство справедливо, будет ли точка c внутри интервала (a, b) или вне его. Но точка c, кроме того, может совпадать или с a



Черт. 82. Черт. 83.

или с b. Полагая же в равенстве (1) c равным a или b, мы немедленно убеждаемся, что равенство (1) справедливо и для этого случая, потому что интегралы с равными пределами равны нулю. Таким образом, равенство (1) доказано для любого положения точки c относительно точек a и b, но доказано только для случая $a<b$. Но если $a>b$, то $b<a$, а потому по доказанному

$$\int_b^a f(x)\,dx=\int_b^c f(x)\,dx+\int_c^a f(x)\,dx.$$

Переставляя в каждом интеграле его пределы, снова получим равенство (1), и теорема окончательно доказана.

Если функция $f(x)$ положительна и $a<c<b$, то теоремой выражается простой геометрический факт, что площадь всей трапеции $aABb$ равна сумме площадей ее частей $aACc$ и $cCBb$ (черт. 82).

Но так же просто геометрическое значение теоремы и в общем случае, когда функция $f(x)$ может принимать как положительные, так и

отрицательные значения. Пусть, например, $a<b<c$ и пусть ордината кривой движется сначала от a к c, потом от c к b (черт. 83). При этом движении она опишет площади, равные

$$\int_a^c f(x)\,dx \text{ и } \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Но при движении от c к b она как бы уничтожит все те площади, которые описала при движении от b к c. Поэтому останется только то, что она описывает при движении от a к b, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

который, следовательно, равен сумме интегралов (2).

Доказанная теорема легко обобщается.

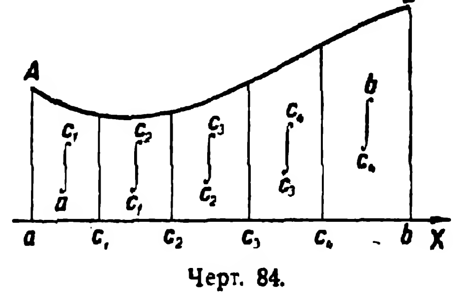
Теорема. **Если функция $f(x)$ непрерывна на всех соответствующих интервалах интеграции, то**

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c_1} f(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\ldots+\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx+\int_{c_n}^{b} f(x)\,dx,$$

какие бы ни были числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Действительно, применяя несколько раз предыдущую теорему, последовательно имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c_1}+\int_{c_1}^{b}=$$
$$=\int_a^{c_1}+\int_{c_1}^{c_2}+\int_{c_2}^{b}=$$
$$=\int_a^{c_1}+\int_{c_1}^{c_2}+\int_{c_2}^{c_3}+\int_{c_3}^{b}.$$



Черт. 84.

Продолжая таким же образом, докажем теорему. Она имеет простой, очевидный геометрический смысл, если функция $f(x)$ положительна и $a<c_1<c_2<\ldots<c_n<b$, так как выражает тот факт, что всякая площадь равна сумме всех тех площадей, на которые она разбита.

§ 102. Теоремы о средних значениях функции и интеграла.

При составлении интегральной суммы

$$s=f(\xi_0)\,\Delta x_0+f(\xi_1)\,\Delta x_1+f(\xi_2)\,\Delta x_2+\ldots+f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1} \tag{1}$$

мы можем выбирать точки x_k произвольно. В частном случае их можно взять так, чтобы основной интервал (a, b) разбился ими на n равных подъинтервалов. Предположим же, что они как раз выбраны таковыми. Тогда длины всех подъинтервалов Δx_k будут равны. Обозначая их общую величину через h:

$$\Delta x_0=\Delta x_1=\Delta x_2=\ldots=\Delta x_{n-1}=h, \tag{2}$$

мы можем представить сумму в таком виде:

$$s = h\,\{f(\xi_0) + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})\}, \tag{3}$$

причем h положительно, если $a < b$, и отрицательно, если $a > b$.

Если $a < b$, то длина всего интервала (a, b) равна $b - a$, а потому

$$h = \frac{b-a}{n}. \tag{4}$$

Если же $a > b$, то геометрическая длина интервала (a, b) равна $a - b$, а геометрическая длина его n-й части равна

$$\frac{a-b}{n}.$$

Но так как теперь h отрицательно, то

$$h = \frac{a-b}{n},$$

т. е. мы опять имеем (4). Заменяя же h этим его выражением, мы из (3) получим

$$s = (b-a)\frac{f(\xi_0) + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})}{n}. \tag{5}$$

При таком способе деления интервала (a, b), т. е. при делении его на равные части, переход к пределу будет, очевидно, заключаться в том, что n должно бесконечно возрастать, а потому

$$\lim s = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_0) + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})}{n},$$

и получается

Теорема. **Если интервал (a, b) делится на n равных подъинтервалов, в каждом из которых соответственно берутся точки ξ_0, $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, то**

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_0) + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})}{n}. \tag{6}$$

Из этого равенства следует равенство

$$\lim\frac{f(\xi_0) + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{7}$$

которым мы сейчас воспользуемся для доказательства теоремы о так называемом среднем значении функции в интервале.

Как известно, средним арифметическим значением системы величин

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

называется величина

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n},$$

равная частному от деления суммы величин на число их.

Пусть $f(x)$ функция, непрерывная в интервале (a, b), и пуст $a<b$.

В каждой точке интервала функция имеет значение. Поэтому возникает вопрос о среднем арифметическом всех значений функции в интервале (a, b).

Но вместо того, чтобы говорить о среднем арифметическом всех значений функции в интервале, принято короче говорить о среднем значении функции в интервале.

Очевидно, что в прямом смысле слова об этом среднем значении нельзя говорить, потому что число значений функции бесконечно. Следовательно, нельзя их все сложить и разделить на число их. Но естественно напрашивается следующее

Черт. 85.

***Определение.* Разделив интервал (a, b) точками деления x_k на n равных подъинтервалов** (черт. 85), **вычислим значения функции в произвольно взятой точке ξ_k каждого подъинтервала (x_k, x_{k+1}). Среднее арифметическое этих значений**

$$f(\xi_0),\ f(\xi_1),\ f(\xi_2), \ldots,\ f(\xi_{n-1})$$

обозначим через σ. Следовательно,

$$\sigma = \frac{f(\xi_0)+f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_{n-1})}{n}. \qquad (8)$$

Предел этой величины σ в предположении, что n бесконечно возрастает, назовем средним арифметическим значением функции в интервале (a, b).

Если это среднее значение функции обозначим через A, то по определению имеем

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_0)+f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_{n-1})}{n}. \qquad (9)$$

Обозначим через m и M наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в интервале (a, b). Тогда при всяком x

$$m \leqq f(x) \leqq M,$$

а потому

$$m \leqq f(\xi_0) \leqq M,\ m \leqq f(\xi_1) \leqq M, \ldots, m \leqq f(\xi_{n-1}) \leqq M.$$

Если мы теперь в (8) заменим в числителе каждое слагаемое через M, то мы увеличим числитель, а потому

$$\sigma \leqq \frac{nM}{n}, \text{ т. е. } \sigma \leqq M.$$

Заменяя же каждое слагаемое в числителе через m, мы найдем $\sigma \geqq m$. Таким образом,

$$m \leqq \sigma \leqq M,$$

а потому

$$m \leqq \lim \sigma \leqq M, \quad \text{т. е.} \quad m \leqq A \leqq M.$$

Мы видим, что среднее значение функции заключено между ее наименьшим и наибольшим значениями. Но непрерывная функция может принять, при некотором значении аргумента, любое значение, промежуточное между ее наименьшим и наибольшим значением. Поэтому если A промежуточно между m и M, то функция $f(x)$ должна при некотором значении аргумента принять как раз значение, равное A. Обозначая это значение аргумента через ξ, будем иметь равенство $A = f(\xi)$, и получается

Теорема. **Среднее значение A непрерывной функции в интервале (a, b) равно значению функции в некоторой точке ξ этого интервала:**

$$A = f(\xi). \tag{10}$$

Говоря иначе, среднее значение функции в интервале есть одно из ее значений в этом интервале.

Очевидно, что эта теорема нам еще не дает возможности вычислить среднее значение, потому что в равенстве (10) о числе ξ мы знаем только то, что оно промежуточно между a и b, и больше ничего о нем не знаем. Но из сравнения равенств (9) и (7) немедленно же получается

Теорема. **Среднее значение функции в интервале равно интегралу от функции, деленному на длину интервала:**

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{11}$$

Вычислим, например, среднее значение $\sin x$ в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Обозначая это среднее значение через p, имеем

$$p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos x = \frac{2}{\pi}.$$

Из сравнения равенств (11) и (10) получается следующая чрезвычайно важная так называемая

Теорема о среднем значении интеграла. **Интеграл от непрерывной функции равен длине интервала интеграции, помноженной на значение функции в некоторой точке интервала. Следовательно,**

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \tag{12}$$

где ξ — промежуточное между a и b, или

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f[a + \theta(b-a)], \tag{13}$$

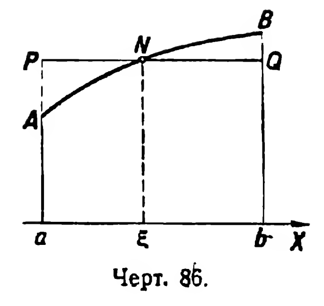
где $0 < \theta < 1$.

Очень просто геометрическое значение этой теоремы в том случае, когда $f(x)$ положительна и $a < b$ (черт. 86). Пусть N — точка на кривой

с неизвестной абсциссой ξ. Проведя через N прямую PQ, параллельную оси абсцисс, мы будем иметь:

площадь прямоугольника $aPQb$ равна $(b-a)f(\xi)$,

площадь трапеции $aABb$ равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.



Черт. 86.

Следовательно, равенство (12) выражает тот простой геометрический факт, что площадь трапеции равна площади прямоугольника с основанием, равным основанию трапеции, и с высотой, промежуточной между наименьшей и наибольшей ординатами кривой.

§ 103. Определенный интеграл как функция своих пределов.

Тот символ, который в определенном интеграле обозначен как аргумент подъинтегральной функции, называется **переменным интеграции**. Так как интегральная сумма

$$s=f(\xi_0)(x_1-a)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1})$$

зависит только от выбора чисел x_k и ξ_k, но не зависит от самого переменного x, то, следовательно,

определенный интеграл не есть функция переменного интеграции, а потому символ переменного интеграции всегда может быть заменен символом любой переменной величины:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(y)\,dy=\cdots=\int\limits_a^b f(z)\,dz.$$

Хотя определенный интеграл не есть функция переменного интеграции, тем не менее нетрудно видеть, что

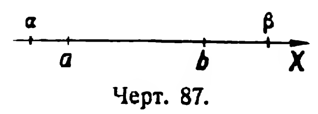
пределами определенного интеграла

$$u=\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

могут быть переменные величины.

Если пределы интеграла — переменные величины, то интеграл есть функция своих пределов.

Действительно, пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (α, β). Тогда в равенстве (1) мы можем рассматривать a и b как переменные величины, каждая из которых может принимать любое значение, лежащее на интервале (α, β).



Черт. 87.

При таком взгляде на a и b пределы интеграла будут переменные, и так как ясно, что всякий раз, как a и b имеют некоторые определенные значения, u тоже получает определенное значение, то, следовательно, u — функция a и b, и теорема доказана.

Но, конечно, определенный интеграл есть функция своих пределов только в том случае, когда пределы переменные. Если они оба постоянные, то и интеграл уже будет не функция, а постоянная величина.

Вообще же легко видеть, что пределы интеграла в различных случаях могут быть или оба переменными, или оба постоянными, или один из них может быть переменным, другой постоянным. Так, например,

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a,$$

и интеграл, стоящий в левой части, будет функцией a и b, пока a и b рассматриваются как переменные. Но если мы дадим им какие-нибудь значения, например 0 и $\frac{\pi}{2}$, то получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1,$$

и интеграл в левой части уже не функция, а число.

Исследуем свойства интеграла как функции своих пределов.

Будем рассматривать нижний предел a как произвольное постоянное, верхний же предел b как переменное. Тогда интеграл будет некоторой функцией верхнего предела. Обозначив эту функцию через $\psi(b)$:

$$\psi(b) = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

поставим задачу: найти производную от этой функции $\psi(b)$. Для этого мы должны найти предел отношения

$$\frac{\psi(b+\Delta b) - \psi(b)}{\Delta b},$$

предполагая, что $\Delta b \to 0$. Так как равенство (2) имеет место при всяком b, то

$$\psi(b+\Delta b) = \int_a^{b+\Delta b} f(x)\,dx,$$

а потому

$$\psi(\Delta b + b) - \psi(b) = \int_a^{b+\Delta b} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Но по теореме о делении интервала интеграции

$$\int_a^{b+\Delta b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+\Delta b} f(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\psi(b+\Delta b) - \psi(b) = \int_b^{b+\Delta b} f(x)\,dx.$$

Применяя к правой части теорему о среднем значении интеграла (стр. 200), имеем

$$\psi(b+\Delta b) - \psi(b) = \Delta b\, f(b+\theta\Delta b). \tag{3}$$

Ясно, что если $\Delta b \to 0$, то предел левой части равен нулю, а потому

$$\lim_{\Delta b \to 0} \psi(b+\Delta b)=\psi(b).$$

Это значит, что функция $\psi(b)$ есть непрерывная функция. Далее из (3) имеем

$$\frac{\psi(b+\Delta b)-\psi(b)}{\Delta b}=f(b+\theta\Delta b).$$

Полагая, что $\Delta b \to 0$, и переходя к пределу, получим $\psi'(b)=f(b)$, т. е.

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx=f(b), \tag{4}$$

и мы нашли производную от интеграла по верхнему пределу.

Если мы теперь будем верхний предел b рассматривать как произвольное постоянное, нижний же предел a как переменное, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

В правой части уже верхний предел переменный, а потому согласно равенству (4)

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx=-\frac{d}{da}\int_b^a f(x)\,dx=-f(a). \tag{5}$$

Из (4) и (5) получается

Теорема. **Интеграл есть непрерывная функция как своего верхнего, так и нижнего пределов.**

Чтобы получить производную от интеграла по верхнему пределу, надо в подъинтегральной функции заменить переменное интеграции верхним пределом:

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx=f(b).$$

Чтобы получить производную от интеграла по нижнему пределу, надо в подъинтегральной функции заменить переменное интеграции нижним пределом и взять результат с обратным знаком:

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx=-f(a)dx.$$

Так, например,

$$\frac{d}{db}\int_0^b \frac{x+\sin x}{x^2+3x}\,dx=\frac{b+\sin b}{b^2+3b},$$

$$\frac{d}{dc}\int_c^s \frac{dx}{\sqrt{2+\cos x}}=-\frac{1}{\sqrt{2+\cos c}}.$$

§ 104. *Определенный интеграл как первообразная.*

Если верхним пределом интеграла от функции $f(x)$ служит как раз аргумент функции, то такое его обозначение:

$$\int_a^x f(x)\,dx \tag{1}$$

по существу было бы неправильно, потому что в нем буква x играет двойную роль, обозначая и верхний предел и переменное интеграции, т. е. два существенно различных объекта мысли, что видно хотя бы из того, что интеграл есть функция своего верхнего предела, но не функция переменного интеграции. Следовательно, если ввести обозначение (1), то интеграл будет функцией x как верхнего предела и не будет функцией x как переменного интеграции. Поэтому, если верхним пределом служит аргумент функции, то переменное интеграции должно быть обозначено какой-нибудь иной буквой и вместо (1) мы должны написать, например, так:

$$\int_a^x f(z)\,dz. \tag{2}$$

Но несмотря на это,

очень часто, когда верхним пределом интеграла служит аргумент функции, то для обозначения переменного интеграции оставляют тот же символ, что и для верхнего предела, а потому вместо (2) пишут (1).

Пусть же мы имеем

$$u=\int_a^x f(x)\,dx, \tag{3}$$

или точнее

$$u=\int_a^x f(z)\,dz. \tag{4}$$

Вычислим производную от u по x. По только что доказанной теореме

$$\frac{du}{dx}=f(x);$$

кроме того, $u=0$ при $x=a$. Получается

Теорема. **Интеграл как функция верхнего предела есть одна из первообразных подынтегральной функции, а именно та из первообразных, которая обращается в нуль в точке нижнего предела. Следовательно, если**

$$u=\int_a^x f(x)\,dx, \tag{5}$$

то

$$du=f(x)\,dx, \tag{6}$$

причем $u=0$ при $x=a$. Обратно, если

$$du=f(x)\,dx, \tag{7}$$

причем известно, что $u=0$ при $x=a$, то

$$u=\int_a^x f(x)\,dx. \tag{8}$$

Как известно, неопределенным интегралом называется сумма любой первообразной подъинтегральной функции и неопределенного постоянного. Поэтому

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x)+C, \quad \text{где} \quad \Phi'(x)=f(x). \tag{9}$$

Но так как определенный интеграл (8) есть одна из первообразных, то мы в равенстве (9) можем за функциональную часть $\Phi(x)$ принять как раз интеграл (8), откуда следует

Теорема. **Неопределенный интеграл может быть представлен через определенный по формуле**

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(x)\,dx+C. \tag{10}$$

Гораздо большее значение имеет

Обратная теорема. **Если функциональная часть неопределенного интеграла непрерывна, то определенный интеграл равен разности между значениями функции интеграла в точках верхнего и нижнего пределов. Поэтому, если**

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x)+C \tag{11}$$

и $\Phi(x)$ непрерывна в интервале (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{12}$$

Действительно, если

$$u=\int_a^x f(x)\,dx,$$

то $\dfrac{du}{dx}=f(x)$ и, следовательно,

$$\frac{du}{dx}=\frac{d\Phi(x)}{dx},$$

а потому

$$u=\Phi(x)+K,$$

где K — некоторое вполне определенное постоянное. Полагая $u=0$, получим $0=\Phi(a)+K$. Следовательно,

$$u=\Phi(x)-\Phi(a),$$

т. е.

$$\int_a^x f(x)\,dx=\Phi(x)-\Phi(a). \tag{13}$$

Принимая $x=b$, получим (12), и теорема доказана *).

В левой части равенства (13) переменное интеграции и верхний предел обозначены одной и той же буквой. В связи с этим заметим, что **если x — переменная величина, то вместо точных обозначений**

$$\int_a^x f(z)\,dz,\quad \int_x^b f(z)\,dz,\quad \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(z)\,dz$$

вошло в обычай писать

$$\int_a^x f(x)\,dx,\quad \int_x^b f(x)\,dx,\quad \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx.$$

Так, например, при вполне точных обозначениях имеем

$$\int_{\sqrt{x}}^{x^2} z^3\,dz = \Big|_{z=\sqrt{x}}^{z=x^2} \frac{z^4}{4}\,dz = \frac{x^8-x^2}{4}. \tag{14}$$

Вместо этого пишут

$$\int_{\sqrt{x}}^{x^2} x^3\,dx = \Big|_{x=\sqrt{x}}^{x=x^2} \frac{x^4}{4} = \frac{x^8-x^2}{4}. \tag{15}$$

Сравнение (15) и (14) ясно показывает, что в (15) символ x употребляется в различных смыслах. Особенно это ясно в равенствах $x=x^2$ и $x=\sqrt{x}$.

Подобным же образом, если b — переменное, то вместо

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

часто пишут

$$\int_a^b f(b)\,db,$$

а если a — переменное, то также пишут

$$\int_a^b f(a)\,da.$$

В случае же опасения хотя бы малейшего недоразумения необходимо условные обозначения заменять точными, т. е. для обозначения переменного интеграции ввести символ, который не фигурирует в выражениях пределов интеграла.

§ 105. Важное замечание о первообразной.

Хотя формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b)-\Phi(a),$$

---

*) Полезно сравнить это доказательство с доказательством на стр. 57.

выражающая связь определенного интеграла с неопределенным, для фактического вычисления определенного интеграла может быть применена только в тех редких случаях, когда неопределенный интеграл может быть вычислен, однако при теоретических исследованиях мы ею часто можем пользоваться с большим успехом, опираясь на следующую теорему, вытекающую из всего только что доказанного:

Всякая функция $f(x)$, непрерывная в некотором интервале, имеет в этом интервале хоть одну непрерывную же первообразную, а потому неопределенный интеграл от функции $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$$

всегда может быть представлен в такой форме, чтобы его функциональная часть в интервале непрерывности подъинтегральной функции была тоже непрерывна.

Действительно, пусть

$$\Phi(x) = \int_c^x f(x)\,dx,$$

где c — какая-нибудь точка внутри интервала.

Если подъинтегральная функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), то в том же интервале непрерывна и функция $\Phi(x)$. Так как в то же время $\Phi'(x) = f(x)$, то теорема доказана.

Еще раз отметим, что равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

имеет место только тогда, когда функция $\Phi(x)$ непрерывна. Помнить это чрезвычайно важно, потому что

на практике при вычислении неопределенного интеграла от непрерывной функции очень часто его функциональная часть получается представленной прерывной функцией.

Это обычно происходит тогда, когда при вычислении неопределенного интеграла прибегают к теореме о подстановке, согласно которой

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \quad \text{где} \quad x = \varphi(t).$$

И вот часто оказывается, что для функции $\varphi(t)$ нельзя найти такого интервала, при изменении в котором ее аргумента t переменное x изменялось бы непрерывно от a до b. В таком случае функциональная часть данного неопределенного интеграла представляется прерывной функцией.

Поясним сказанное примером. Пусть требуется вычислить интеграл

$$G = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}. \tag{1}$$

В интервале $(0, \pi)$ подъинтегральная функция непрерывна и положительна. Она изображается кривой, лежащей над осью X, а потому сам интеграл *заведомо положителен. Во всяком случае он не равен нулю.*

Вычисляем его. Вспоминая, что под $\operatorname{arc\,tg} x$ мы разумеем дугу, лежащую в первой или четвертой четверти, последовательно имеем:

$$\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{d2\operatorname{tg} x}{1+(2\operatorname{tg} x)^2},$$

а потому

$$\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x) + C. \qquad (2)$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}\pi) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 0) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 0 - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 0 = 0.$$

В чем же дело? Дело в том, что функциональная часть

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x)$$

получилась у нас прерывной в интервале $(0, \pi)$. В самом деле, представим ее в таком виде:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z, \quad z = 2\operatorname{tg} x.$$

Когда x непрерывно возрастает от нуля до $\frac{\pi}{2}$, то z непрерывно возрастает от нуля до $+\infty$. Поэтому в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ мы должны принять, что

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{4}, \qquad (3)$$

и функция $\Phi(x)$ непрерывна на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Будем менять x от $\frac{\pi}{2}$ до π. При этом изменении z уже отрицателен, и когда x, находясь во второй четверти, приближается к $\frac{\pi}{2}$, то z стремится к $-\infty$, а потому теперь мы должны принять, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = -\infty$. Благодаря этому

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-\infty) = -\frac{\pi}{4}, \qquad (4)$$

но функция $\Phi(x)$ непрерывна в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Из (3) и (4) мы видим, что в точке $x=\frac{\pi}{2}$ функция $\Phi(x)$ принимает различные значения в зависимости от того, с какой стороны приближается x к этой точке. *Следовательно, функция $\Phi(x)$, будучи непрерывной* как в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, так и в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, в то же время прерывна на всем интервале $(0, \pi)$, а потому для этого интервала мы не имеем права воспользоваться теоремой о вычислении определенного интеграла через неопределенный.

Как же быть? Очень просто. Мы разбиваем интервал $(0, \pi)$ на два: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Имеем

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x},$$

$$\int\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}x)+C,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}x)=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(+\infty)=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}x)=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-\infty)=\frac{\pi}{4},$$

а потому окончательно

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}>0.$$

§ 106. Теорема об интеграле алгебраической суммы.

Ниже под x будем разуметь аргумент подъинтегральной функции, под a и b — пределы интеграла, каждый из которых может быть или постоянной величиной или переменной; в частном случае он может быть любой функцией от x.

Теорема. **Определенный интеграл от суммы непрерывных функций равен сумме интегралов между теми же пределами от всех слагаемых:**

$$\int_a^b\{\varphi(x)\pm\psi(x)\pm\ldots\pm\omega(x)\}\,dx=$$

$$=\int_a^b\varphi(x)\,dx\pm\int_a^b\psi(x)\,dx\pm\ldots\pm\int_a^b\omega(x)\,dx. \qquad (1)$$

Первое доказательство. Пусть

$$\int\varphi(x)\,dx=\Phi(x)+C,\quad \int\psi(x)\,dx=F(x)+C,\ \ldots,\ \int\omega(x)\,dx=G(x)+C,$$

где функциональные части предполагаем непрерывными, что, как мы видели, всегда возможно. Имеем

$$\int\{\varphi(x)\pm\psi(x)\pm\ldots\pm\omega(x)\}\,dx=\Phi(x)\pm F(x)\pm\ldots\pm G(x)+C,$$

а потому

$$\int_a^b\{\varphi(x)\pm\psi(x)\pm\ldots\pm\omega(x)\}\,dx=$$

$$=\{\Phi(b)\pm F(b)\pm\ldots\pm G(b)\}-\{\Phi(a)\pm F(a)\pm\ldots\pm G(a)\}=$$

$$=\{\Phi(b)-\Phi(a)\}\pm\{F(b)-F(a)\}\pm\ldots\pm\{G(b)-G(a)\}=$$

$$=\int_a^b\varphi(x)\,dx\pm\int_a^b\psi(x)\,dx\pm\ldots\pm\int_a^b\omega(x)\,dx,$$

и теорема доказана. Ее можно доказать и иначе. Пусть

$$u=\int_a^x\varphi(x)\,dx\pm\int_a^x\psi(x)dx\pm\ldots\pm\int_a^x\omega(x)\,dx. \tag{2}$$

Каждый интеграл в правой части обращается в нуль при $x=a$, поэтому

$$u=0 \text{ при } x=a. \tag{3}$$

Кроме того, из (2) следует, что

$$du=(\varphi(x)\pm\psi(x)\pm\ldots\pm\omega(x))\,dx. \tag{4}$$

Из (3) и (4) заключаем

$$u=\int_a^x\{\varphi(x)\pm\psi(x)\pm\ldots\pm\omega(x)\}\,dx. \tag{5}$$

Из (2) и (5) имеем

$$\int_a^x\{\varphi(x)\pm\ldots\pm\omega(x)\}\,dx=\int_a^x\varphi(x)\,dx\pm\ldots\pm\int_a^x\omega(x)\,dx.$$

Полагая здесь $x=b$, получим (1), и теорема снова доказана.

Ее геометрическое значение очень просто. Пусть AB и CD — две данные кривые:

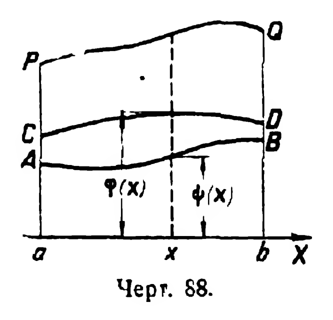
$$y=\varphi(x) \quad \text{и} \quad y=\psi(x)$$

и пусть PQ — кривая, для которой

$$y=\varphi(x)+\psi(x).$$

Следовательно, каждая ордината кривой PQ равна сумме соответствующих ей ординат данных кривых AB и CD. Говорят, что кривая PQ образована наложением друг на друга кривых AB и CD. Так как

$$\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx,$$



Черт. 88.

то

$$\text{площ. } aPQb = \text{площ. } aABb + \text{площ. } aCDb.$$

Следовательно, **площадь трапеции, ограниченная кривой, образованной наложением данных кривых, равна сумме площадей трапеций, ограниченных данными кривыми.**

В зависимости от вида функций $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *кривая* PQ *может очень* отличаться от формы налагаемых кривых. Так, например, если наложим друг на друга верхнюю и нижнюю половины эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то получим отрезок прямой.

§ 107. Интеграл от диференциального выражения.

Понятие интеграла можно несколько расширить.

Если $f(x)$ *- данная непрерывная функция и если через* $\Phi(x)$ мы обозначим какую-нибудь ее непрерывную первообразную, то $\Phi'(x) = f(x)$ и

$$f(x)\,dx = d\Phi(x).$$

Следовательно, **всякое произведение любой функции на диференциал ее аргумента можно всегда рассматривать как диференциал некоторой функции.**

Это заключение можно несколько расширить. Пусть мы имеем произведение одной функции на диференциал другой функции, т. е. произведение типа

$$\psi(x)\,d\varphi(x).$$

Такое произведение мы тоже можем рассматривать как диференциал некоторой функции. В самом деле,

$$\psi(x)\,d\varphi(x) = \psi(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

и теперь ясно, что если через $\Phi(x)$ мы обозначим функцию, производная которой равна $\psi(x)\,\varphi'(x)$, то

$$\psi(x)\,d\varphi(x) = d\Phi(x).$$

Следовательно, **всякое произведение одной функции на диференциал другой функции всегда можно рассматривать как диференциал некоторой функции.**

Выражения типа $\psi(x)\,d\varphi(x)$ часто называют диференциалами.

Если теперь $\Phi'(x) = f(x)$, то подъинтегральное выражение в интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

мы можем представить в форме: $d\Phi(x)$. Тогда самый интеграл изобразится так:

$$\int_a^b d\Phi(x).$$

Это и приводит к тому расширению понятия об интеграле, о котором мы говорили.

Интегралом от диференциала данной функции называется интеграл от производной данной функции:

$$\int_a^b d\Phi(x) = \int_a^b \Phi'(x)\,dx.$$

Интегралом от диференциального выражения $\varphi(x)\,d\psi(x)$ называется интеграл от функции $\varphi(x)\,\psi'(x)$:

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \int_a^b \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx.$$

Мы видим, что это расширение понятия интеграла не касается существа самого понятия, а только той формы, в которой может быть представлено подъинтегральное выражение.

Теорема. **Интеграл от диференциала непрерывной функции равен разности значений функции при верхнем и нижнем пределах:**

$$\int_a^b d\Phi(x) = \Big/_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1}$$

Так как

$$\int d\Phi(x) = \int \Phi'(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

то имеем (1).

§ 108. Теорема об интегрировании по частям.

Всегда имеем

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \varphi(b)\,\psi(b) - \varphi(a)\,\psi(a) - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x) =$$

$$= [\varphi(x)\,\psi(x)]_a^b - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

при условии непрерывности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и их производных.

Последовательно имеем

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \int_a^b \{d\varphi(x)\,\psi(x) - \psi(x)\,d\varphi(x)\} =$$

$$= \int_a^b d\varphi(x)\,\psi(x) - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x) = \Big/_{x=a}^{x=b} \varphi(x)\,\psi(x) - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x).$$

Выражение $\varphi(b)\,\psi(b) - \varphi(a)\,\psi(a)$ называется проинтегрированной частью.

Пример. Имеем

$$\int_1^\pi \cos x \ln x\,dx = \int_1^\pi \ln x\,d\sin x = [\sin x \cdot \ln x]_1^\pi - \int_1^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_1^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Полезно сравнить эту теорему, обозначив $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ через u и v, с соответствующей теоремой в теории неопределенных интегралов.

§ 109. Теорема о подстановке.

Если $f(x)$ — функция, непрерывная на интервале (a, b), и если $x = \varphi(t)$ — непрерывная функция вместе с своей производной на интервале (α, β) и если при изменении t от α до β величина x изменяется от a до b так, что

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta),$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Пусть, как и раньше,

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

где $\Phi(x)$ непрерывна в интервале (a, b). По теореме о подстановке для неопределенного интеграла имеем

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(t)) + C,$$

а потому

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

и теорема доказана. Ее можно доказать и так: пусть

$$u = \int_a^x f(x)\,dx. \tag{2}$$

Следовательно, $u=0$ при $x=a$ и

$$du=f(x)\,dx. \tag{3}$$

Если мы примем $x=\varphi(t)$, *то* u *обратится в функцию от* t, *и равен*ство (3) заменится равенством

$$du=f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt; \tag{4}$$

при этом, так как $x=a$ при $t=\alpha$, то u обращается в нуль при $t=\alpha$, а потому из (4) следует, что

$$u=\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5}$$

Сравнивая со (2), имеем

$$\int_{a}^{x} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{6}$$

Полагая $t=\beta$, получим (1), потому что, когда $t=\beta$, то $x=b$. Теорема доказана.

Мы видим, что, производя в определенном интеграле замену переменного, мы должны не только заменить старое переменное функцией нового, *но также должны изменить пределы интеграла*. Новым интервалом интеграции будет тот интервал, в котором должно измениться новое переменное t, чтобы старое переменное x могло пробежать весь свой интервал.

Пусть, например, требуется вычислить площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Для верхней его половины

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Поэтому, если u — площадь верхней половины эллипса, то

$$u=\frac{b}{a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Делаем подстановку $x=a\sin t$. Чтобы x менялось от $-a$ до $+a$, надо t менять от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$u=\frac{b}{a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}(\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t})\,a\cos t\,dt=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=ab\Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)=\frac{\pi ab}{2}.$$

Площадь всего эллипса равна πab.

Для теоретических применений теоремы о подстановке полезно заметить следующую ее форму. Пусть

$$y = f(x).$$

Тогда, если $x = \varphi(t)$, то

$$y = f(\varphi(t)).$$

Имеем

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta y\,dx,$$

т. е. имеем

$$\int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\,dx,$$

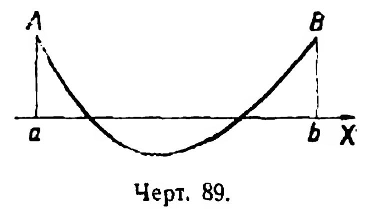
причем в левой части y — функция x, а в правой части y и x — функции t. Следовательно,

если в интеграле

$$\int_a^b y\,dx$$

y есть функция x, то величина интеграла не изменится, если мы будем рассматривать y и x *как функции нового переменного* t, но только при условии, чтобы пределы интеграла a и b, между которыми меняется x, были заменены пределами α и β, между которыми меняется новое переменное t:

$$\int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\,dx.$$



Черт. 89.

Мы воспользуемся этой формой теоремы о подстановке для вывода формулы для площади трапеции.

Мы видели, что если ордината кривой дана как функция абсциссы: $y = f(x)$, то для площади u, пробегаемой ординатой при изменении x от a до b, имеем:

$$u = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Предположим теперь, что кривая дана параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

и пусть начальной и конечной точкам кривой соответствуют значения параметра, равные t_0 и T. Следовательно, изменяя t от t_0 до T, мы получим всю кривую AB.

Рассмотрим, как выразится в этом случае площадь u, пробегаемая ординатой при изменении t от t_0 до T.

Хотя кривая нам и дана параметрически, но ее ордината во всяком случае есть некоторая функция абсциссы и, рассматривая y как функцию x, мы имеем:

$$u = \int_a^b y\,dx, \tag{7}$$

где a и b — абсциссы начальной и конечной точек кривой.

Но по теореме о подстановке

$$\int_a^b y\,dx = \int_{t_0}^{T} y\,dx,$$

где в правой части y и x — уже функции t. Следовательно,

$$u = \int_{t_0}^{T} y\,dx,$$

и мы получаем теорему:

Если кривая дана параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то для площади, описываемой ординатой при изменении параметра от t_0 до T, имеем

$$u = \int_{t_0}^{T} y\,dx, \tag{8}$$

где в подъинтегральном выражении надо y и x рассматривать как функции параметра.

Чтобы из (8) получить обычную формулу, заметим, что если кривая дана уравнением $y = f(x)$, то параметром служит x. Если он изменяется от a до b, то согласно (8) имеем (2).

Пример. Пусть требуется вычислить площадь u циклоиды, уравнения которой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Чтобы получить эту площадь, надо t изменять от 0 до 2π, а потому

$$u = \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2 \Big/_{t=0}^{t=2\pi} \left(\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right) dt = 3\pi a^2.$$

Следовательно, площадь циклоиды в три раза больше площади образующего круга.

§ 110. Сравнение интегралов.

Теорема об интеграле положительной функции. **Если нижний предел интеграла меньше верхнего и если подъинтегральная функция положительна при всех значениях аргумента, то интеграл положителен. Следовательно,**

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0,$$

если $a < b$ и $f(x) > 0$ при всяком x.

По теореме о среднем значении интеграла имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a).$$

Но в правой части по условию теоремы оба множителя $b-a$ и $f(\xi)$ положительны, а потому и произведение их положительно.

Геометрически теорема очевидна. В самом деле, если $f(x)>0$, то кривая $y=f(x)$ лежит всеми точками выше оси X. Так как $a<b$, то интеграл равен площади, описываемой ординатой, движущейся в положительном направлении. Следовательно, площадь положительна, а потому положителен и интеграл.

***Теорема о сравнении интегралов*. Если $a<b$ и $\varphi(x)<\psi(x)$ при всяком x, то**

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx<\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

В самом деле, при всяком x

$$\psi(x)-\varphi(x)>0,$$

а потому по предыдущей теореме

$$\int_a^b (\psi(x)-\varphi(x))\,dx>0,$$

что можно переписать в таком виде:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\,dx>0.$$

Отсюда немедленно же вытекает теорема.

§ 111. Обобщенная теорема о среднем значении интеграла.

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в интервале (a, b), причем функция $\psi(x)$ сохраняет на всем интервале один и тот же знак, то

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx=\varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx, \tag{1}$$

где ξ — некоторое число, промежуточное между a и b.

Предположим сначала, что $\psi(x)$ положительна при всяком x, и пусть m и M — наименьшее и наибольшее из значений функции $\varphi(x)$ на интервале (a, b):

$$m\leqq\varphi(x)\leqq M. \tag{2}$$

Так как $\psi(x)>0$, то

$$m\psi(x)\leqq\varphi(x)\,\psi(x)\leqq M\psi(x); \tag{3}$$

$$m\int_a^b \psi(x)\,dx\leqq\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx\leqq M\int_a^b \psi(x)\,dx. \tag{4}$$

а потому

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = q\int_a^b \psi(x)\,dx, \tag{5}$$

где q — некоторое число, промежуточное между m и M *).

Но всякая непрерывная функция принимает все значения, промежуточные между ее наименьшим значением m и наибольшим M. Следовательно, должно существовать такое ξ, промежуточное между a и b, что

$$q = \varphi(\xi). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует (1). Но это, если $\psi(x) > 0$. Если же $\psi(x)$ везде отрицательна, то $-\psi(x)$ положительна, а потому по доказанному

$$\int_a^b \varphi(x)\cdot(-\psi(x))\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b -\psi(x)\,dx,$$

откуда опять следует (1).

Необходимо помнить, что **теорема верна только при условии, что $\psi(x)$ или везде положительна, или везде отрицательна.** Но если $\psi(x)$ может менять знак в интервале (a, b), то теорема может оказаться неверной.

В равенстве (1) можно принять $\psi(x) = 1$, так как в этом случае она сохраняет свой знак в интервале (a, b). Но принимая $\psi(x) = 1$, получим

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b dx = \varphi(\xi)(b-a),$$

т. е. получим теорему о среднем значении интеграла. Следовательно, равенство (1) действительно есть обобщение этой теоремы.

§ 112. Заключение.

Для лучшего обозрения основных свойств определенного интеграла мы представим их в виде таблицы в несколько ином порядке, чем доказывали их. Объяснение обозначений, а также словесную формулировку теорем опускаем.

---

*) Если

$$mA \leqq z \leqq MA, \tag{1}$$

то, деля на A, получим

$$m \leqq \frac{z}{A} \leqq M \quad \text{при} \quad A > 0 \quad \text{и} \quad m \geqq \frac{z}{A} \geqq M \quad \text{при} \quad A < 0. \tag{2}$$

В том и другом случае $\frac{z}{A}$ промежуточно между m и M, а потому $\frac{z}{A} = q$, $z = qA$, где q — какое-то число, промежуточное между m и M.

1. Определения:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x,$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \int_a^b \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx,$$

$$\int_a^b d\Phi(x) = \int_a^b \Phi'(x)\,dx,$$

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

Интеграл есть функция своих пределов, но не функция переменного интеграции.

2. Условные обозначения:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f(z)\,dz, \quad \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(z)\,dz.$$

3. Соотношение между определенным и неопределенным интегралами: если

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$$

и $\Phi(x)$ непрерывна, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

4. Теорема о производных интеграла по пределам:

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b), \quad \frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a).$$

5. Интеграл как функция верхнего предела: если

$$u = \int_a^x f(x)\,dx,$$

то

$$du = f(x)\,dx$$

и $u = 0$ при $x = a$.

6. Теорема о перестановке пределов:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

7. Теорема о выносе постоянного множителя:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

8. Теорема об интеграле суммы:

$$\int_a^b \{\varphi(x) \pm \psi(x)\}\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx \pm \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

9. Теорема о делении интервала интеграции:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

10. Теорема об интеграле диференциала функции:

$$\int_a^b d\Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

11. Теорема об интегрировании по частям:

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x) = [\varphi(x)\, \psi(x)]_a^b - \int_a^b \psi(x)\, d\varphi(x).$$

12. Теорема о подстановке:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt, \quad x = \varphi(t),$$

$$\int_a^b y\, dx = \int_\alpha^\beta y\, dx, \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta).$$

13. Теоремы о среднем значении интеграла:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(\xi),$$

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = \varphi(\xi) \int_a^b \psi(x)\, dx$$

при условии, что $\psi(x)$ сохраняет один. и тот же знак в интервале интеграции.

14. Теорема о сравнении интегралов: если

$$\varphi(x) < \psi(x) \quad \text{и} \quad a < b,$$

то

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx < \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

15. Теорема о среднем значении функции в интервале:

$$A = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Вводя понятие об определенном интеграле как пределе суммы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x,$$

мы предполагали, что подъинтегральная функция непрерывна в интервале интеграции и что пределы интеграла конечны. Такие интегралы будем называть обыкновенными.

Но в приложениях мы постоянно встречаемся не только с непрерывными функциями, но и с прерывными. Кроме того, часто приходится рассматривать функции, аргументы которых изменяются не в некотором конечном интервале, но могут принимать всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли расширить, или, как принято говорить, нельзя ли обобщить понятие определенного интеграла так, чтобы не только подъинтегральная функция могла быть прерывной, но чтобы и пределы интеграла могли принимать как конечные, так и бесконечные значения? Такое обобщение оказывается возможным, и результатом его получаются интегралы, называемые в отличие от обыкновенных обобщенными, или несобственными, интегралами.

§ 113. Обобщенные интегралы первого рода.

Идея непрерывности проходит красной нитью через весь Анализ. Она же лежит в основе обобщения понятия интеграла. Как известно,

функция называется непрерывной в точке c, если ее предел в этой точке конечен и равен ее значению в этой точке, т. е. если

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

причем правая часть конечна. Если же предел функции в точке c или бесконечен, или, хотя и конечен, но не равен значению функции в этой точке, или же, наконец, если его не существует, то точка c называется точкой прерывности.

Функция может быть прерывна или на одном конце рассматриваемого интервала, или на обоих его концах, или только внутри него, или, наконец, как внутри него, так и на одном, или на обоих его концах.

Обобщенными интегралами первого рода назовем интегралы от функций, прерывных только на одном или на обоих концах интервала интеграции, но непрерывных во всех внутренних точках интервала.

Нижний предел интеграла может быть меньше или больше верхнего предела. Но случай, когда верхний предел меньше нижнего, простой перестановкой пределов приводится к случаю, когда нижний предел меньше верхнего. Поэтому при теоретических рассуждениях можно ограничиться только рассмотрением случая, когда нижний предел меньше верхнего, что мы в дальнейшем и будем обыкновенно предполагать.

Чтобы подойти к определению понятия об обобщенном интеграле, рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда данная функция непрерывна на всем интервале за исключением одного из его концов.

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная во всех точках интервала (a, b), кроме точки b (черт. 90). В таком случае мы не имеем права говорить об интеграле

$$G=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Черт. 90.

Но так как, какое бы мы ни взяли как угодно малое положительное число ε, функция везде непрерывна на интервале $(a, b-\varepsilon)$, не исключая его концов, то мы имеем право говорить об интеграле

$$H=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{2}$$

при всяком достаточно малом положительном ε.

Будем ε бесконечно умалять. В пределе интервал $(a, b-\varepsilon)$ обратится в интервал (a, b), а потому, если при этом интеграл (2) имеет конечный предел, то этот предел естественно принять за интеграл (1), т. е. естественно принять, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим, например, интеграл

$$A=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3}$$

Подъинтегральная функция в интервале $(0, 1)$ везде непрерывна, за исключением правого конца его, где она обращается в ∞. Поэтому берем сначала интеграл

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

где ε положительно и достаточно мало. Так как

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(1-\varepsilon),$$

то ясно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

а потому принимаем, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Идея обобщения ясна. Если функция прерывна только в точке b, то вместо интервала (a, b) мы берем интервал $(a, b-\varepsilon)$, где ε достаточно мало. Затем мы рассматриваем интеграл уже в интервале $(a, b-\varepsilon)$ и смотрим, чему он равен в пределе, если $\varepsilon \to 0$.

Точно так же, если функция прерывна только в точке a, то вместо интервала (a, b) берем интеграл по интервалу $(a+\varepsilon, b)$ и затем смотрим, к какому пределу стремится этот интеграл, если ε будет бесконечно умаляться. Следовательно, понятие об обобщенном интеграле вводится с помощью следующих определений:

$a \quad a+\varepsilon \qquad b \qquad X$

Черт. 91.

Если функция $f(x)$ прерывна только при верхнем пределе b, то интегралом от a до b, который обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

называется тот предел, если он существует и конечен, к которому стремится интеграл

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

при бесконечно умаляющемся ε.

Если функция $f(x)$ прерывна только при нижнем пределе a, то интегралом от a до b, обозначаемым так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

называется тот предел, если он существует и конечен, к которому при бесконечно умаляющемся ε стремится интеграл

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, по определению, если b — точка прерывности, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

а если a — точка прерывности, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

при непременном условии, что в том и другом случае предел в правой части существует и конечен.

Если теперь функция $f(x)$ прерывна на обоих концах интервала (черт. 92), то этот интервал любой внутренней точкой c делится на два

подъинтервала, на каждом из которых функция уже прерывна только на одном конце, а потому естественно ввести такое определение:

Если функция $f(x)$ прерывна на обоих концах интервала (a, b), но непрерывна внутри него и если оба интеграла

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)\,dx,$$

a c b X

Черт. 92.

где c — внутренняя точка, существуют, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим несколько примеров на эти определения.

Примеры. 1. Пусть требуется вычислить интеграл $G = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Подъинтегральная функция в интервале (0,1) прерывна только в точке $x = 1$, где она обращается в бесконечность. Поэтому согласно определению пишем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

где ε бесконечно умаляется, принимая только положительные значения. Так как

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x} + C,$$

то

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2},$$

а потому, умаляя ε до нуля, получаем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}.$$

2. Пусть требуется вычислить интеграл

$$G = \int_1^2 \frac{dx}{2-x}, \tag{1}$$

в котором подъинтегральная функция прерывна только при верхнем пределе. Мы пишем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = -\ln \varepsilon. \tag{2}$$

Если ε бесконечно умаляется, то правая часть в пределе обращается в бесконечность. Следовательно, интеграл (2) не имеет конечного предела, а потому обобщенного интеграла (1) не существует.

3. Рассмотрим интеграл:

$$G=\int_0^1\left(\cos\frac{\pi}{1-x}\right)\frac{dx}{(1-x)^2}, \tag{3}$$

где подъинтегральная функция прерывна только при верхнем пределе. Мы пишем:

$$\int_0^1\frac{\cos\frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}dx=\lim_{\eta\to 0}\int_0^{1-\eta}\frac{\cos\frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}dx,$$

и так как

$$\int\frac{\cos\frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}dx=\int\cos\frac{\pi}{1-x}d\frac{1}{1-x}=\frac{1}{\pi}\int\cos y\,dy=\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{1-x}+C,$$

то

$$\int_0^{1-\eta}\frac{\cos\frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}dx=\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\eta}. \tag{4}$$

Если η стремится к нулю, то величина $\frac{\pi}{\eta}$ бесконечно возрастает, синус же ее, колеблясь между -1 и $+1$, не стремится ни к какому конечному пределу. Следовательно, интеграл (4) не имеет конечного предела, а потому не существует и интеграл (3).

4. Существует или не существует интеграл

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5}$$

от функции, прерывной на обоих концах интервала $(-1, 1)$, где она обращается в бесконечность?

Берем внутри интервала $(-1, 1)$ какую-нибудь точку c и исследуем сначала вопрос о существовании интегралов

$$\int_c^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad \int_{-1}^c\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6}$$

Так как

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,$$

то

$$\int_c^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin c,$$

$$\int_{-1+\varepsilon}^{c}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin c-\arcsin(-1+\varepsilon).$$

а потому если $\varepsilon \longrightarrow 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 1 - \arcsin c,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin c + \arcsin 1.$$

Следовательно, интегралы (6) существуют, а именно

$$\int_{c}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin c, \qquad \int_{-1}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin c + \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Поэтому существует и интеграл (5). Складывая интегралы (7), найдем, что

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Примеры (2) и (3) ясно показывают, что обобщенные интегралы не всегда существуют.

Обобщенный интеграл, если он существует, называется сходящимся в точке прерывности функции, а если не существует, — расходящимся.

§ 114. Обобщенные интегралы второго рода.

Обобщенными интегралами второго рода назовем интегралы от функций, прерывных внутри интервала и, быть может, на одном или на обоих концах его.

Черт. 93.

Если функция $f(x)$ прерывна внутри интервала (a, b) в точках $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$, делящих основной интервал на подъинтервалы, внутри каждого из которых функция $f(x)$ уже непрерывна, и если интегралы первого рода

$$\int_{a}^{c_1} f(x)\,dx, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{c_{n-1}}^{b} f(x)\,dx \tag{1}$$

существуют, то по определению

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{b} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Например, согласно этому определению

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

потому что подынтегральная функция прерывна внутри интервала только в точке $x=0$. Так как

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -3\sqrt[3]{\varepsilon} + 3 \right\} = 3,$$

$$\int_{0}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ 3 - 3\sqrt[3]{\varepsilon} \right\} = 3,$$

то

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 6.$$

§ 115. Интегралы с бесконечными пределами.

Интегралами с бесконечными пределами, или интегралами третьего рода, назовем интегралы, у которых один или оба предела бесконечны.

Будем предполагать нижний предел меньшим верхнего, потому что к этому случаю всегда можно перейти перестановкой пределов, если нижний предел больше верхнего.

Определение. **Если интеграл**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

существует при всяком достаточно большом b, то по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

при условии, что предел в правой части существует и конечен.

Если интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

существует при всяком a, меньшем b, то по определению

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

при условии, что предел в правой части существует и конечен.

Если интегралы

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx,$$

где c — какое-нибудь конечное число, существуют, то по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим, существует ли

Вместо бесконечного преде

Заставляем теперь b стремиться
ни к какому пределу. Следовател

Но рассмотрим интеграл

Так как

то

и если $c \to +\infty$, имеем

Следовательно,

Рассмотрим интеграл

с двумя бесконечными предел
делению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

если интегралы в правой части

то, беря сначала вместо беско

$$\int_a^c xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-c^2}$$

Так как $e^{-\infty}=0$, то

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^c xe^{-x^2}\,dx$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{c} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-c^2}, \qquad \int_{c}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{-c^2},$$

а потому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = 0.$$

§ 116. О связи обобщенного интеграла с неопределенным.

Раз введено понятие об обобщенном интеграле, то возникает вопрос: остаются ли справедливыми для обобщенных интегралов теоремы, ранее доказанные нами для обыкновенных интегралов?

Все эти теоремы были нами доказаны, опираясь на связь определенного интеграла с неопределенным, на связь, выражаемую равенством:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Поэтому естественно прежде всего исследовать, сохраняется ли эта связь и для обобщенных интегралов.

В дальнейшем под значением функции в точке $+\infty$ (или $-\infty$) мы будем разуметь тот предел, если он существует, к которому стремится функция $f(x)$, когда x стремится к $+\infty$ (или $-\infty$). Следовательно, по определению

$$\Phi(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \Phi(x), \qquad \Phi(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \Phi(x).$$

Эти равенства, если их читать справа налево, напоминают равенство

$$\lim_{x \to c} \Phi(x) = \Phi(c),$$

которым определяется непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке c при добавочном условии, чтобы значение функции в точке c было конечно. Ввиду этого

если значение функции $\Phi(x)$ в точке $+\infty$ конечно, то условимся считать функцию $\Phi(x)$ непрерывной в точке $+\infty$.

Соответствующего условия будем придерживаться и для точки $-\infty$. Заметив это, предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на всем интервале (a, b), не исключая его концов, и пусть c — точка внутри этого интервала. Мы знаем, что если

$$\Phi(x) = \int_c^x f(x)\,dx, \quad \text{то} \quad \Phi'(x) = f(x),$$

причем $\Phi(x)$ тоже непрерывна на всем интервале. Следовательно,

функция, непрерывная на всем интервале, имеет на этом интервале везде непрерывную первообразную.

Докажем, что подобная же теорема имеет место и для обобщенных интегралов.

Теорема. **Будет ли каждое из чисел a и b конечно или бесконечно, всегда *если обобщенный интеграл***

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

существует, то подъинтегральная функция имеет хоть одну первообразную, непрерывную на всем интервале (a, b), а потому неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C \tag{2}$$

можно представить так, чтобы его функциональная часть была непрерывна на всем интервале интеграции, не исключая его концов.

Докажем сначала эту теорему для интегралов первого рода. Предположим для общности, что функция $f(x)$ непрерывна внутри интервала (a, b), но прерывна на обоих концах его. Пусть c — какая-нибудь точка внутри интервала. Так как по условию теоремы интеграл (1) существует, то существуют и интегралы

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)\,dx, \tag{3}$$

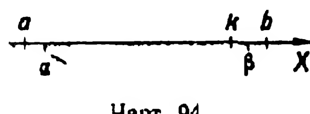
причем по определению

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_c^x f(x)\,dx. \tag{5}$$

Если k — произвольно взятая точка внутри интервала (a, b), то, как бы близка она ни оказалась к одному из концов интервала (a, b), всегда можно найти такой интервал $(\alpha\beta)$, концы которого лежали бы внутри интервала (a, b) и для которого точка k была бы внутренней. Тогда функция $f(x)$, а потому и $\Phi(x)$ будут непрерывны на интервале $(\alpha\beta)$. Следовательно, функция $\Phi(x)$ непрерывна в каждой *внутренней* точке интервала (a, b), причем $\Phi'(x) = f(x)$.



Черт. 94.

Докажем, что функция $\Phi(x)$ непрерывна также в точках a и b. Для этого надо доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(a+\varepsilon) = \Phi(a), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(b-\varepsilon) = \Phi(b),$$

т. е. согласно (5) надо доказать, что имеют место равенства (4). Но эти равенства имеют место, потому что интегралы (3) существуют. Итак, $\Phi(x)$ непрерывна на всем интервале, не исключая его концов. Теорема доказана для интегралов первого рода. Перейдем к ее доказательству и для интегралов второго рода.

Мы предположим, что функция $f(x)$ прерывна внутри интервала (a, b) только в двух точках c_1 и c_2. Идея доказательства, как увидим, не зависит от числа точек прерывности. Но если интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{6}$$

существует, то по определению существуют и интегралы

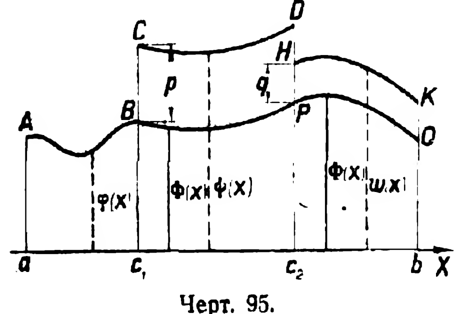
$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \quad \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx,$$

каждый из которых уже интеграл первого рода, а потому по только что доказанному в каждом из интервалов (a, c_1), (c_1, c_2) и (c_2, b) функция $f(x)$ имеет первообразную, непрерывную в нем.

Пусть эти первообразные будут функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $w(x)$; из них

$\varphi(x)$ непрерывна на интервале (a, c_1), причем $\varphi'(x)=f(x)$;
$\psi(x)$ " " " (c_1, c_2), " $\psi'(x)=f(x)$;
$w(x)$ " " " (c_2, b), " $w'(x)=f(x)$.

Вообразим, что каждая из этих функций изображена в своем интервале кривой. Эти кривые пусть будут AB, CD, HK (черт. 95).



Черт. 95.

Уменьшим все ординаты кривой CD на одну и ту же величину p, равную разности между ординатами c_1C и c_1B. Получим некоторую новую кривую BP.

Уменьшим все ординаты кривой HK на одну и ту же величину q, равную разности между ординатами c_2H и c_2P. Пусть PQ будет полученная кривая.

Мы теперь имеем непрерывную кривую $ABPQ$, и если для нее

$$y=\Phi(x),$$

то функция $\Phi(x)$ непрерывна на интервале (a, b), причем

на интервале (a, c_1) $\Phi(x)=\varphi(x)$ а потому $\Phi'(x)=f(x)$;
" " (c_1, c_2) $\Phi(x)=\psi(x)-p$ " " $\Phi'(x)=f(x)$;
" " (c_2, b) $\Phi(x)=w(x)-q$ " " $\Phi'(x)=f(x)$.

Итак, на всем интервале (a, b) функция $\Phi(x)$ непрерывна и $\Phi'(x)=f(x)$. Теорема доказана и для интегралов второго рода.

Перейдем теперь к интегралам с бесконечными пределами. Пусть попрежнему

$$\Phi(x)=\int_c^x f(x)\,dx.$$

Если интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

существует, то по определению

$$\lim_{x\to+\infty}\int_c^x f(z)\,dz=\int_c^{+\infty} f(z)\,dz,$$

т. е.

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=\Phi(+\infty),$$

причем $\Phi(+\infty)$ конечно. Мы условились говорить, что в этом случае функция $\Phi(x)$ непрерывна при $x=+\infty$.

Если теперь интеграл

$$\int_c^{-\infty} f(x)\,dx$$

существует и конечен, то

$$\lim_{x\to-\infty}\int_c^x f(z)\,dz=\int_c^{-\infty} f(z)\,dz,$$

т. е.

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=\Phi(-\infty),$$

а потому первообразная $\Phi(x)$ непрерывна и при $x=-\infty$. Теорема окончательно доказана. Она связывает непрерывность первообразной с существованием обобщенного интеграла. Легко теперь доказать чрезвычайно важную обратную теорему, которая часто позволяет легко решить вопрос о существовании обобщенного интеграла.

Черт. 96.

***Теорема.* Будут ли пределы интеграла a и b конечны или бесконечны, всегда если неопределенный интеграл**

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x)+C \tag{7}$$

представлен так, что его функциональная часть $\Phi(x)$ непрерывна на всем интервале (a,b), не исключая его концов, то обобщенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{8}$$

существует, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{9}$$

Предположим сначала, что функция $f(x)$ прерывна только на концах интервала (a,b), и пусть c — точка внутри интервала. Так как функция непрерывна на каждом интервале $(a+\varepsilon, c)$ и $(c, b-\varepsilon)$, то

$$\left.\begin{aligned}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx&=\Phi(c)-\Phi(a+\varepsilon),\\ \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx&=\Phi(b-\varepsilon)-\Phi(c).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Пусть $\varepsilon \to 0$. Ввиду непрерывности функции $\Phi(x)$ правые части, а потому и левые имеют конечные пределы. Следовательно, интегралы

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

существуют, причем из (10), переходя к пределу, имеем

$$\int_a^c f(x)\,dx = \Phi(c) - \Phi(a), \qquad \int_c^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(c).$$

Складывая эти равенства, получаем равенство (9), и теорема доказана для интегралов первого рода. Пусть теперь функция $f(x)$ прерывна внутри интервала (a, b) в точках $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. По определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_3} + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{b},$$

где в правой части все интегралы первого рода, а потому по только что доказанному

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx = \Phi(c_1) - \Phi(a),$$

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = \Phi(c_2) - \Phi(c_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{c_{n-1}}^{b} f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(c_{n-1}).$$

Складывая эти равенства, получаем равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{11}$$

и теорема доказана для интегралов второго рода.

Пусть в равенстве (11) верхний предел стремится к $+\infty$. Переходя к пределу, получим:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \Phi(+\infty) - \Phi(a). \tag{12}$$

Это — равенство (11), в котором на месте b стоит $+\infty$. Если же в (11) заставим a стремиться к $-\infty$, то получим:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(-\infty). \tag{13}$$

Наконец, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= [\Phi(+\infty) - \Phi(c)] + [\Phi(c) - \Phi(-\infty)]$$

и окончательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \Phi(+\infty) - \Phi(-\infty). \tag{14}$$

Теорема окончательно доказана. Согласно ей, например, имеем

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big/_{x=-1}^{x=+1} \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \Big/_{x=-\infty}^{x=+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

§ 117. Теоремы об обобщенных интегралах.

Все теоремы об интегралах между конечными пределами от непрерывных функций мы доказали, опираясь на теорему, что если

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1}$$

Но эта теорема имеет место и для обобщенных интегралов, если они существуют, а потому

почти все теоремы (за исключением некоторых), доказанные для интегралов от непрерывных функций между конечными пределами, имеют место и для обобщенных интегралов, если они существуют.

В этом нетрудно убедиться, если пересмотреть все доказательства предыдущей главы, считая, что пределы a и b могут быть и бесконечны, а подъинтегральная функция прерывна. Окажется, что все доказательства опираются только на равенство (1) при предположении непрерывности $\Phi(x)$. При этом немедленно же заметим, что имеют место следующие исключения.

Теорема о среднем значении интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \tag{2}$$

а в связи с ней и теорема о среднем значении функции для обобщенного интеграла вообще не имеет места,

потому что при ее доказательстве мы пользовались теоремой Лагранжа:

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a),$$

которая требует, чтобы $\Phi'(x)$, т. е. подъинтегральная функция, внутри интервала была конечна, а также чтобы a и b тоже были конечны.

Теорема об интеграле от диференциала функции

$$\int_a^b d\Phi(x)=\Phi(b)-\Phi(a)$$

требует, чтобы функция $\Phi(x)$ была непрерывна,

потому что она доказывается, опираясь на то, что

$$\int \Phi'(x)\,dx=\Phi(x)+C,$$

а равенство (1) имеет место только при непрерывности функциональной части.

В связи с этим заметим, что

теорема об интегрировании по частям:

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x)=[\varphi(x)\,\psi(x)]_a^b-\int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

требует непрерывности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, хотя их производные могут быть прерывны,

потому что при доказательстве мы опирались на то, что

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x)=\int_a^b d\varphi(x)\,\psi(x)-\int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

и на равенство

$$\int_a^b d\varphi(x)\,\psi(x)=[\varphi(x)\,\psi(x)]_a^b=\varphi(b)\,\psi(b)-\varphi(a)\,\psi(a),$$

которое, как мы только что видели, верно только при условии непрерывности произведения $\varphi(x)\,\psi(x)$.

§ 118. Заключение.

1. *Определения*. Если $f(x)$ прерывна только в точке b, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ прерывна только в точке a, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ прерывна как в точке a, так и в точке b, но внутри интервала непрерывна, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если функция прерывна внутри интервала (a, b) в точках c_1, $c_2, \ldots, c_{n-1}$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int_{c_{n-1}}^b .$$

2. В случае бесконечных пределов интегралов по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Все определения имеют место при условии, что выражения, стоящие в правых частях, конечны.

3. *Теорема.* Если

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$$

и $\Phi(x)$ непрерывна на интервале (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

как для конечных, так и для бесконечных a и b, как для непрерывной, так и прерывной функции $f(x)$.

4. Теоремы об обыкновенных интегралах имеют место и для обобщенных, за исключением теоремы о среднем значении интеграла и функции. Но при этом теорема об интеграле от диференциала функции и теорема об интегрировании по частям требуют непрерывности входящих в них функций, но не их производных.

ИНТЕГРАЛ КАК ФУНКЦИЯ ПАРАМЕТРОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ.

Мы до сих пор рассматривали понятие интеграла только от функций одного переменного, но его можно приложить и к функциям многих переменных. Для них, подобно понятию о частных производных, можно ввести понятие о частных интегралах, но только эти интегралы обыкновенно называют не частными интегралами, а интегралами как функции параметров.

§ 119. Интегралы как функции параметров.

Пусть $f(x, y, \ldots, z)$ — функция нескольких аргументов, непрерывная при изменении каждого аргумента в некотором соответствующем ему интервале. Если все ее аргументы, кроме x, мы будем рассматривать как произвольные постоянные, то она обратится в функцию одного переменного, от которой, как от всякой функции одного переменного, можно взять определенный интеграл между соответствующими пределами. Пусть

$$G = \int_a^b f(x, y, \ldots, z)\, dx. \tag{1}$$

Когда от функции нескольких аргументов берется определенный интеграл по какому-нибудь аргументу, то те аргументы, которые при этом рассматриваются как постоянные, получают название параметров; тот же аргумент, который рассматривается как переменное, называется переменным интеграции.

Следовательно, интеграл (1) взят по x; аргументы $y, \ldots, z$ — его параметры.

Очевидно, что от функций нескольких аргументов мы можем взять интеграл по каждому аргументу. Поэтому рядом с интегралом (1) мы имеем и такие интегралы:

$$\int_\alpha^\beta f(x, y, \ldots, z)\, dy, \ldots, \int_\gamma^\delta f(x, y, \ldots, z)\, dz$$

и т. д.

Обратим внимание на то, что если

$$G = \int_a^b f(x, y, \ldots, z)\, dx, \tag{1}$$

то на параметры $y, \ldots, z$ мы должны смотреть как на постоянные только до тех пор, пока мы вычисляем интеграл. Но в самом выражении

интеграла G на эти параметры мы можем смотреть как на переменные, и очевидно, что значение интеграла G вполне зависит от того, какие значения мы выберем для a и b, а также для параметров $y, \ldots, z$.

Определенный интеграл есть функция как своих пределов, так и параметров.

Заметим, что в интеграле (1) его пределы a и b могут быть в свою очередь функциями параметров. Так, например, интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x+y} = \ln|b+y| - \ln|a+y|$$

есть функция своих пределов a, b и параметра y. Но в нем пределы a и b мы можем принять равными некоторым функциям, например $a=y^2$, $b=1+y+y^2$, и тогда получим

$$\int_{y^2}^{1+y+y^2} \frac{dy}{x+y} = \ln|1+y|^2 \quad \ln|y^2+y| = \ln\left|\frac{1+y}{y}\right|.$$

§ 120. Диференцирование интеграла по параметру.

Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, непрерывная относительно каждого аргумента при изменении его в некотором интервале.

Возьмем от нее, рассматривая y как параметр, интеграл по x между постоянными пределами a и b. Этот интеграл будет функцией параметра y. Обозначая ее через $\psi(y)$, имеем:

$$\psi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{1}$$

Вычислим производную от $\psi(y)$. Так как

$$\psi(y+h) = \int_a^b f(x, y+h)\,dx,$$

то

$$\frac{\psi(y+h) - \psi(y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}\,dx.$$

Предполагая, что $f'_y(x, y)$ тоже непрерывна, по теореме Лагранжа получаем

$$f(x, y+h) - f(x, y) = hf'_y(x, y+\theta h),$$

а потому

$$\frac{\psi(y+h) - \psi(y)}{h} = \int_a^b f'_y(x, y+\theta h)\,dx.$$

Пусть h бесконечно умаляется. Переходя к пределу, имеем:

$$\psi'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Принимая во внимание (1), получаем теорему:

Чтобы получить производную по параметру от определенного интеграла с постоянными пределами, достаточно продиференцировать по параметру подъинтегральную функцию. Следовательно,

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx \qquad (2)$$

при условии, что подъинтегральная функция и ее производная по параметру непрерывны.

Но эта теорема доказана только в предположении, что пределы интеграла a и b постоянны, т. е. не меняются с изменением параметра y. Посмотрим, как выразится производная от интеграла в том случае,, когда a и b в свою очередь функции y. Пусть вообще

$$u=\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Рассматривая a, b и y как независимые переменные, мы будем иметь u как функцию этих трех переменных a, b, y. По только что доказанному

$$\frac{du}{dy}=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx,$$

потому что, когда вычисляется от u производная по y, то остальные ее аргументы a и b должны рассматриваться как постоянные.

Чтобы найти частные производные от u по a и b, пользуемся теоремой о производной интеграла по пределам. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial a}=-f(a,y),\quad \frac{\partial u}{\partial b}=+f(b,y).$$

Если же мы предположим, что a и b в свою очередь функции y, то тогда по теореме о производной функции от функций имеем:

$$\frac{du}{dy}=\frac{\partial u}{\partial a}\frac{da}{dy}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{db}{dy}+\frac{\partial u}{\partial y},$$

а потому заключаем, что

если a и b — функции y, то

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=-f(a,y)\frac{da}{dy}+f(b,y)\frac{db}{dy}+\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx. \qquad (3)$$

При применении этой теоремы на практике, если пределы интеграла — функции параметра, всегда надо сначала обозначить пределы интеграла особыми буквами.

Пусть, например, требуется найти производную по t от следующего интеграла:

$$u = \int_{\sin t}^{e^t} e^{tx^2}\, dx.$$

Мы сначала пишем:

$$u = \int_a^b e^{tx^2}\, dx,$$

где a и b рассматриваем как функции t:

$$a = \sin t,\ b = e^t.$$

Имеем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{db}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = -e^{ta^2}\cdot\cos t + e^{tb^2}e^t + \int_a^b x^2 e^{tx^2}\, dx,$$

и окончательно

$$\frac{du}{dt} = -\cos t\, e^{t\sin^2 t} + e^{t(1+e^{2t})} + \int_{\sin t}^{e^t} x^2 e^{tx^2} dx.$$

Рассмотрим еще пример. Пусть

$$G = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-z)^n f(z)\, dz.$$

Параметром служит x. Пишем:

$$G = \frac{1}{n!}\int_0^a (x-z)^n f(z)\, dz.$$

Рассматривая G как функцию a и x, имеем:

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{1}{n!}(x-a)^n f(a),$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^a (x-z)^{n-1} f(z)\, dz$$

Принимая теперь $a = x$, находим:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x},$$

потому что $\frac{\partial G}{\partial a} = 0$ при $a = x$. Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{n!}\int_0^x (x-z)^n f(z)\, dz = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-z)^{n-1} f(z)\, dz.$$

§ 121. Интегрирование по параметру.

Если, имея непрерывную функцию $f(x, y)$, мы возьмем от нее интеграл по x между пределами a и b, то этот интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

есть функция y, которую мы можем проинтегрировать по y между некоторыми пределами α и β. Получим выражение:

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy.$$

Здесь мы сначала интегрируем по x, потом по y. Спрашивается: что мы получим, если ту же функцию $f(x, y)$ между теми же пределами проинтегрируем сначала по y потом по x? Ответ на это дает так называемая

Теорема об интегрировании по параметру. **Чтобы проинтегрировать по параметру интеграл от непрерывной функции между пределами, не зависящими от параметра, достаточно проинтегрировать по параметру подъинтегральную функцию. Следовательно, результат двукратного интегрирования функции двух переменных между постоянными пределами не зависит от порядка интегрирования.**

Требуется доказать, что если a, b, α, β не зависят от x и y, то

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Пусть

$$u = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy, \quad v = \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Будем считать, что α, β и a имеют какие-нибудь постоянные значения; что же касается b, то его будем рассматривать как переменное. Тогда u и v станут функциями b. Вычислим их производные по b.

Начнем с u. Эта величина представляется в виде определенного интеграла по y от следующего выражения:

$$\int_a^b f(x, y)\, dx,$$

которое является функцией от b и y; обозначая его на время через $\omega(b, y)$, мы имеем:

$$u = \int_\alpha^\beta \omega(b, y)\, dy.$$

Теперь мы ясно видим, что, чтобы найти производную от u по b, надо продиференцировать определенный интеграл по параметру, роль

которого играет b. Имеем

$$\frac{du}{db}=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{d}{db}\int_{a}^{b}f(x, y)\,dx\right\}dy$$

и, применяя к интегралу в скобках теорему о производной по верхнему пределу, заключаем, что

$$\frac{du}{db}=\int_{\alpha}^{\beta}f(b, y)\,dy.$$

Найдем теперь производную от v. Для этого достаточно применить теорему о производной интеграла по верхнему пределу. Имеем:

$$\frac{dv}{db}=\int_{\alpha}^{\beta}f(b, y)\,dy.$$

Мы видим, что производные от u и v равны. Поэтому

$$u=v+c,$$

т. е.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{a}^{b}f(x, y)\,dx\right\}dy=\int_{a}^{b}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}f(x, y)\,dy\right\}dx+C,$$

где C — постоянная величина, не меняющаяся с изменением b. Но полагая b равным a, мы находим, что $C=0$. Теорема доказана.

§ 122. Обобщенные интегралы как функции параметров.

Мы доказали теоремы о диференцировании и интегрировании по параметру, предполагая пределы интегралов конечными, а подъинтегральную функцию непрерывной. Спрашивается: остаются ли эти теоремы в силе и для обобщенных интегралов?

Рассмотрим такой интеграл:

$$A=\int_{0}^{1}\left\{\int_{0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right\}dy. \tag{1}$$

Если от декартовых координат перейдем к полярным:

$$x=r\cos\omega,\quad y=r\sin\omega,$$

то легко найдем, что

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\cos 2\omega}{r^2}.$$

Если $x\to 0$ и $y\to 0$, то $r\to 0$, а потому правая часть вообще стремится к бесконечности. Следовательно, в точке $(0, 0)$ подъинтегральная функция теряет непрерывность, а потому интеграл (1) есть обобщенный интеграл.

Его подъинтегральную функцию можно получить так: возьмем функцию

$$u=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$$

и вычислим ее частные производные. Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right). \tag{3}$$

Интегрируем левую часть по x в пределах от 0 до 1. Имеем:

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx=\Big/_{x=0}^{x=1}\frac{x}{x^2+y^2},$$

а потому

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx=-\frac{1}{1+y^2}.$$

Интегрируя это равенство по y тоже в пределах от 0 до 1, найдем:

$$\int_0^1\left\{\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right\}dy=[-\operatorname{arc\,tg} y]_0^1=-\frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

Но если мы левую часть (3) проинтегрируем по y между теми же пределами 0 и 1, то найдем, что

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy=\frac{1}{1+x^2},$$

а потому, интегрируя теперь по x, имеем:

$$\int_0^1\left\{\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right\}dx=[\operatorname{arc\,tg} x]_0^1=\frac{\pi}{4}. \tag{5}$$

Сравнивая (4) и (5), мы видим, что, интегрируя два раза одну и ту же функцию сначала по одному переменному, а потом по другому, мы будем получать различные значения в зависимости от порядка интегрирования.

Мы видим, что теорема об интегрировании по параметру не всегда бывает справедлива для обобщенных интегралов. Поэтому когда приходится диференцировать или интегрировать по параметру обобщенный интеграл, то в каждом случае необходимо доказывать, что как раз в этом случае возможно произвести эти операции. Но оказывается, что в большинстве случаев такое доказательство требует достаточно тонких исследований. В то же время обобщенные интегралы постоянно встречаются как в механике, так и в физике. Поэтому представители этих дисциплин обходят указанные затруднения очень просто, руководствуясь следующим принципом: если конкретно поставленная задача приводит к диференцированию или интегрированию по параметру обобщенного интеграла, то, следовательно, это возможно.

В большинстве случаев этот принцип на практике оправдывается результатами, согласными с опытом. Но иногда он приводит и к ошибочным выводам.

Ниже мы будем допускать, что диференцирование и интегрирование по параметру возможно для всех рассматриваемых обобщенных интегралов.

§ 123. Вычисление определенных интегралов.

Какими методами мы обладаем для вычисления определенных интегралов? Мы знаем, что если

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Благодаря этому соотношению мы можем считать задачу о вычислении данного определенного интеграла решенной всякий раз, когда мы умеем вычислить соответствующий неопределенный интеграл. Но так как неопределенный интеграл мы в состоянии вычислить только в редких случаях, то установленная связь между определенным интегралом и неопределенным не решает вполне вопроса о вычислении определенных интегралов. Невозможность вычислить для всякой функции неопределенный интеграл заставляет искать другие методы для вычисления определенных интегралов. Надо заметить, что из того факта, что раз мы знаем неопределенный интеграл, то тем самым мы имеем возможность вычислить определенный, было бы ошибочно заключить, что если мы не можем вычислить неопределенного интеграла, то в таком случае мы не в состоянии найти и значение определенного интеграла, — это было бы ошибочным потому, что, как увидим, нередко можно найти значение определенного интеграла и в тех случаях, когда мы не знаем соответствующего неопределенного интеграла. Вообще при вопросе о вычислении определенного интеграла надо резко различать два случая: один случай мы имеем тогда, когда пределы интеграла рассматриваются как переменные величины, т. е. когда в выражении

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

a и b не имеют некоторых вполне определенных числовых значений, но могут принимать различные значения. Совершенно другой случай мы имеем, когда оба предела имеют вполне определенные числовые значения, т. е. когда мы имеем выражения типа:

$$\int_1^2 f(x)\,dx, \quad \int_5^7 f(x)\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

и т. д. Рассмотрим отдельно оба эти случая.

Пусть нижний предел a имеет определенное числовое значение, например, $a=2$; верхний же предел будем рассматривать как переменную величину и обозначим его через x. Если

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

то

$$d\Phi(x) = f(x)\,dx$$

и, следовательно,

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

Теперь ясно, что если верхний предел определенного интеграла — переменная величина, то вычислить определенный интеграл — это то же, что вычислить неопределенный интеграл. Иными словами это значит, что если в данном случае мы не можем вычислить неопределенный интеграл, то тем самым мы лишены возможности вычислить и определенный интеграл. Но в совершенно ином положении находимся мы, когда требуется вычислить определенный интеграл, *пределами которого служат некоторые вполне определенные числа.*

В самом деле, пусть

$$G = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

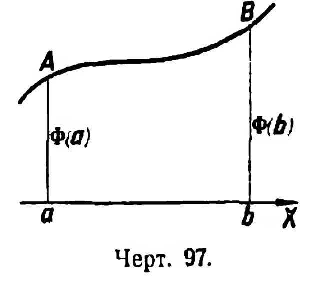
где a и b имеют данные вполне определенные числовые значения. Если мы предположим, что

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C, \tag{2}$$

то тогда

$$G = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{3}$$

Но раз a и b — некоторые числа, то $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$ — определенные значения функции $\Phi(x)$, т. е. тоже числа, и равенство (3) ясно показывает следующее: *чтобы знать значение интеграла G, нам не надо знать самой функции $\Phi(x)$, но достаточно знать только два ее значения в точках $x=a$ и $x=b$.*



Черт. 97.

Очевидно, возможно ожидать, что в некоторых случаях мы, не зная самой функции, будем в то же время в состоянии вычислить два ее значения. Тогда не зная неопределенного интеграла, мы будем знать определенный.

Насколько одно дело знать функцию и совсем другое дело знать два ее значения, видно особенно ясно геометрически. Построим кривую

$$y = \Phi(x)$$

для интервала (a, b). Значения ее $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$ изобразятся ординатами точек A и B.

Чтобы знать эти значения, мы должны знать только положение двух точек A и B. Для этого нам совершенно не надо знать, как течет между ними кривая. Но чтобы знать функцию $\Phi(x)$, нам надо знать течение всей кривой.

Очевидно, одно дело знать форму всей кривой и совершенно другое знать положение только двух точек на ней. Можно, не имея ни малейшего представления о форме кривой, в то же время хорошо знать две точки, через которые она проходит. Поэтому-то, не зная неопределенного интеграла, иногда возможно вычислить определенный, если пределами

его служат не переменные величины, а числа. Очень часто удается этого достигнуть, применяя теоремы о диференцировании и интегрировании по параметру, как то показывают следующие ниже примеры.

§ 124. Интеграл типа $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$.

Неопределенный интеграл от подъинтегральной функции мы не можем вычислить, но определенный можем.

Для этого прежде всего заметим, что так как в подъинтегральном выражении x изменяется только от нуля до $\frac{\pi}{2}$, то мы можем написать, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, \qquad (1)$$

потому что $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$, если x лежит в первой четверти.

И вот оказывается, что в то время как затруднительно вычислить прямо интеграл (1), напротив легко вычисляется интеграл более общего типа:

$$u = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg} (a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, \qquad (2)$$

где a — произвольное постоянное.

Рассматривая u как функцию a и применяя теорему о диференцировании определенного интеграла по параметру, вычислим из (2) производную от u по a. Диференцируя подъинтегральное выражение по a, имеем:

$$\frac{du}{da} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}. \qquad (3)$$

Оказывается, что мы можем вычислить определенный интеграл правой части. Делаем подстановку

$$\operatorname{tg} x = y, \quad x = \operatorname{arc\,tg} y.$$

Когда x меняется от нуля до $\frac{\pi}{2}$, то y меняется от 0 до $+\infty$, а потому

$$\frac{du}{da} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{(1 + y^2)(1 + a^2 y^2)} = \frac{1}{1 - a^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1 + a^2 y^2) - a^2 (1 + y^2)}{(1 + y^2)(1 + a^2 y^2)} dy =$$

$$= \frac{1}{1 - a^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1 + y^2} - \frac{a^2}{1 - a^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1 + a^2 y^2}. \qquad (4)$$

Будем считать a положительным, и во втором интеграле правой части положим $y = az$. Очевидно, что пределы для z будут тоже 0 и $+\infty$, а потому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1 + a^2 y^2} = \frac{1}{a} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Если же в подъинтегральной функции вместо z опять напишем y, то (4) даст нам

$$\frac{du}{da}=\frac{1-a}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}. \tag{5}$$

Мы вычислили производную от u по a, не зная пока выражения для u как функции a. Но из (5) следует, что

$$u=\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{1+a}=\frac{\pi}{2}\ln|1+a|+C, \tag{6}$$

и мы вычислили u. Остается найти только значение постоянного C, которое не меняется с изменением a. Для этого, принимая во внимание значение u, пишем равенство:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln|1+a|+C.$$

Это равенство справедливо при всяком положительном a. Полагая, что a бесконечно умаляется, в пределе при $a=0$ получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\cdot dx=\frac{\pi}{2}\ln 1+C,$$

т. е. $C=0$, а потому окончательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln|1+a|,\quad a>0.$$

Полагая же здесь $a=1$, находим искомый интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg}x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2. \tag{7}$$

Перепишем его так:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d\ln\sin x=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d\ln\sin x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx,$$

так как, применяя правило Лопиталя, найдем, что

$$[x\ln\sin x]_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}=0.$$

а потому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 \tag{8}$$

Полагаем здесь $x = \frac{\pi}{2} - y$. Пределы для y будут $\frac{\pi}{2}$ и 0, а потому:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln \cos y \, dy = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Пишем здесь вместо y опять x. Получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \tag{9}$$

Вычитая (9) из (8) найдем, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x \, dx = 0. \tag{10}$$

Так, вычислив один интеграл, мы из него получили ряд других.

§ 125. Интеграл Пуассона.

Интегралом Пуассона называется интеграл:

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{1}$$

Нетрудно убедиться, что этот интеграл существует. Сначала рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{2}$$

Если $x > 1$, то $x^2 > x$, а потому

$$e^{-x^2} < e^{-x}$$

и при всяком $b > 1$

$$\int_1^b e^{-x^2} dx < \int_1^b e^{-x} dx.$$

Так как

$$\int_1^b e^{-x} dx = e^{-1} - e^{-b} < 1,$$

то при всяком $b > 1$

$$\int_1^b e^{-x^2} dx < 1.$$

Если b бесконечно возрастает, то интеграл в левой части тоже возрастает; но так как он при этом остается меньше единицы, то он не бесконечно возрастает, а имеет конечный предел. Следовательно, интеграл (2) существует. Замечая же, что

$$\int_0^b e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^b e^{-x^2}dx,$$

заключаем, что

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

и, следовательно, интеграл

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \tag{3}$$

существует. Он был вычислен Пуассоном так.

Вместо того чтобы для обозначения аргумента функции пользоваться символом x, мы вправе воспользоваться для его обозначения и каким-нибудь иным символом, так что рядом с равенством (3) мы вправе написать также, например, такое равенство:

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy. \tag{4}$$

Крайнее остроумие метода Пуассона заключается в том, что он, считая x и y двумя различными переменными величинами, одновременно рассматривает оба равенства (3) и (4), и вместо того, чтобы вычислять A, вычисляет A^2. Мы имеем:

$$A^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right)\cdot\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx. \tag{5}$$

Но первый интеграл в правой части мы можем рассматривать как постоянный множитель, стоящий перед знаком второго интеграла, а потому мы его можем подвести под знак второго интеграла. Делая это, получаем:

$$A^2 = \int_0^{+\infty}\left\{e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right\}dx. \tag{6}$$

Интеграл, стоящий в скобках, множится на e^{-x^2}. Но x относительно y есть постоянная величина, а потому, подводя e^{-x^2} как постоянный множитель под знак интеграла, равенство (6) преобразуем в равенство:

$$A^2 = \int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dy\right\}dx. \tag{7}$$

В результате оказывается, что величина A может быть получена с помощью двукратного интегрирования, а именно: функцию двух переменных

$$e^{-x^2-y^2}$$

надо проинтегрировать сначала по y, потом по x.

Повидимому, излишнее осложнение — вот все, чего мы достигли.

Но сделаем в первом интеграле, который приходится вычислять, т. е. в интеграле

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dy, \tag{8}$$

подстановку. Замечая, что при вычислении этого интеграла мы должны рассматривать y как переменное, а x как постоянную положительную величину, мы полагаем:

$$y = xt.$$

Ясно, так как x положительно, что в то время как y возрастает от нуля до $+\infty$, t тоже возрастает от нуля до $+\infty$. Следовательно, пределы для t те же, что и для y, а потому

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+t^2)} dt,$$

и равенство (7) перепишется в такой форме:

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+t^2)} dt \right\} dx. \tag{9}$$

Переменим теперь порядок интегрирования. Имеем:

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+t^2)} dx \right\} dt. \tag{10}$$

И вот оказывается, что теперь мы можем произвести первое интегрирование, потому что мы можем вычислить соответствующий неопределенный интеграл. В самом деле,

$$\int e^{-x^2(1+t^2)} x\,dx = -\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)} + C,$$

а потому

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)} x\,dx = \frac{1}{2(1+t^2)},$$

и равенство (10) принимает следующий вид:

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \Big/_0^{+\infty} \operatorname{arc\,tg} t = \frac{\pi}{4}$$

и, следовательно, $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Интеграл Пуассона вычислен. Чтобы отчетливее отметить все важнейшие моменты примененного метода, мы можем изобразить весь путь вычисления в следующей схеме:

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad A = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy,$$

а потому

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy \right\} dx = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)} x\,dt \right\} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)} x\,dx \right\} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{\pi}{4}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (11)$$

Этот интеграл Пуассона часто представляют в несколько иной форме. Делаем подстановку:

$$x = -z.$$

Когда x возрастает от нуля до $+\infty$, то z меняется от нуля до $-\infty$, а потому после подстановки из (11) получаем:

$$-\int_0^{-\infty} e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Переставляя же пределы интеграла и снова написав x вместо z, найдем, что

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (12)$$

Складывая (11) и (12), имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}. \qquad (13)$$

Это и есть другая форма интеграла Пуассона, о которой мы говорили. Сделаем в (11) подстановку:

$$x = \sqrt{y}, \quad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

Пределы для y, очевидно, будут тоже нуль и $+\infty$, а потому:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}dy}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Заменяя же здесь символ y снова символом x, получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}. \qquad (14)$$

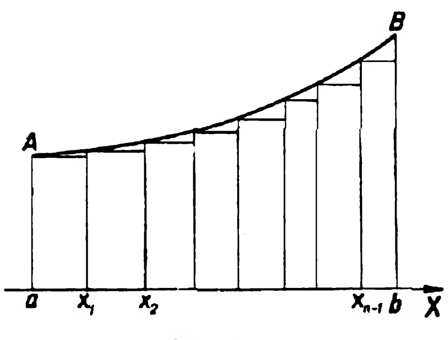
§ 126. Приближенное вычисление интегралов.

Когда никаким путем не удается вычислить определенный интеграл, то тогда вычисляют его приближенно.

Существует много методов приближенного вычисления определенных интегралов. Самая трудная сторона — это оценка приближения. Мы рассмотрим несколько таких методов, ограничиваясь только указанием их идеи и оставляя в стороне вопрос о точности вычисления.

Мы всегда можем предположить, что в интеграле, который требуется вычислить, подъинтегральная функция положительна, потому что если бы это условие не соблюдалось, то мы могли бы предварительно разбить

интервал интеграции на подъинтервалы, в каждом из которых функция сохраняет свой знак. После этого мы вычисляли бы интеграл по каждому подъинтервалу отдельно, причем если бы в каком-нибудь подъинтервале подъинтегральная функция оказалась бы отрицательной, то мы изменили бы ее знак на обратный.

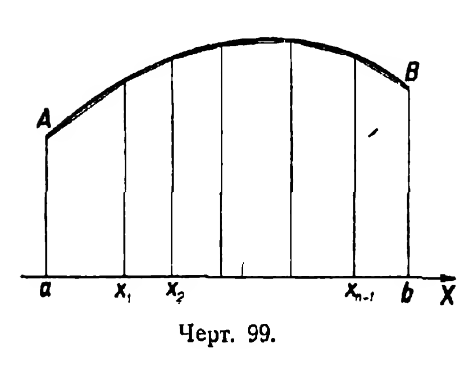


Черт. 98.

Итак, будем предполагать, что данная функция $f(x)$ положительна в интервале (a, b). Если мы изобразим эту функцию кривой, то величина интеграла

$$Q=\int_a^b f(x)\,dx$$

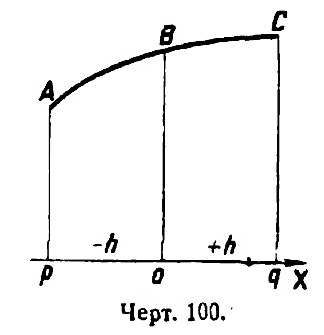
равна площади соответствующей кривой трапеции. Поэтому задача о приближенном вычислении интеграла равносильна задаче о приближенной квадратуре кривой трапеции.



Черт. 99.

Самый грубый способ приближенного вычисления заключается в том, что, разделив основание трапеции на *достаточно большое число* подъинтервалов точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, мы строим элементарные прямоугольники и принимаем сумму площадей их за величину искомого интеграла.

Более же точное значение, как то геометрически очевидно, мы получим так: восставив ординаты в точках x_k, мы соединяем хордами концы всяких двух смежных ординат. Тогда мы получим ряд обыкновенных трапеций. Вычислив значения функции в каждой точке x_k, мы получим возможность вычислить площадь каждой трапеции. Сумму их мы примем за величину интеграла. Этот способ приближенного вычисления называется способом трапеции. Сущность его заключается в том, что всякую часть дуги данной кривой мы заменяем ее хордой. Очевидно, что мы получим более точное приближение, если дугу кривой заменим кривой же, но более простого типа. Решим предварительно следующую задачу: пусть требуется приближенно вычислить площадь *u* трапеции $pABCq$, ограниченной сверху кривой, относительно которой мы знаем только то, что она проходит через три точки A, B и C. Мы предположим, что проекция точки B делит основание трапеции pq пополам. Точку O примем за начало координат. Пусть $+h$ и $-h$ будут абсциссы точек C и A; через l_1, l_2, l_3 обозначим ординаты точек A, B, C.



Черт. 100.

Раз кривая неизвестна, то за нее естественно принять такую кривую, которая проходила бы через точки A, B, C и для которой зависимость ординаты от абсциссы выражалась бы по возможности просто. После

прямой такой кривой будет кривая, уравнение которой

$$y = a + bx + cx^2, \tag{1}$$

т. е. парабола, ось которой параллельна оси Y.

Посмотрим, можно ли коэфициенты a, b, c подобрать так, чтобы кривая (1) проходила через точки A, B, C. Для этого координаты этих точек должны удовлетворять уравнению (1), что дает равенства:

$$l_1 = a - bh + ch^2, \quad l_2 = a, \quad l_3 = a + bh + ch^2,$$

из которых нетрудно найти:

$$a = l_2, \quad b = \frac{l_3 - l_1}{2h}, \quad c = \frac{l_1 + l_3 - 2l_2}{2h^2}.$$

Следовательно, кривая

$$y = l_2 + \frac{l_3 - l_1}{2h} x + \frac{l_1 + l_3 - 2l_2}{2h^2} x^2 \tag{2}$$

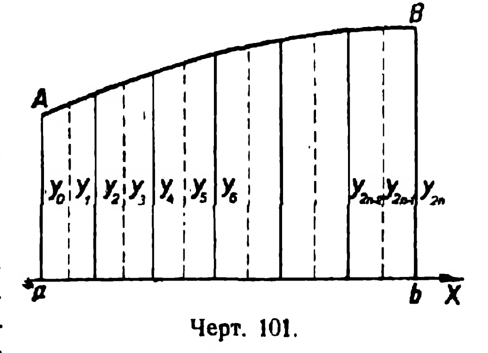
проходит через точки A, B, C. Она и изображена на чертеже. Принимая ее вместо неизвестной кривой, мы приближенно имеем:

$$u = \int_{-h}^{+h} \left\{ l_2 + \frac{l_3 - l_1}{2h} x + \frac{l_1 + l_3 - 2l_2}{2h^2} x^2 \right\} dx.$$

Вычислив интеграл, найдем

$$u = \frac{h(l_1 + l_3 + 4l_2)}{3}. \tag{3}$$

Это выражение мы примем за приближенное значение площади, ограниченной сверху неизвестной кривой.



Черт. 101.

Пусть теперь требуется вычислить площадь $aABb$, ограниченную кривой $y = f(x)$. Делим основание ab на четное число $2n$ равных частей; пусть h — длина каждой из них. В точках деления восставляем ординаты y_0, $y_1, \ldots, y_{2n}$. Предполагаем, что длины их вычислены. Обозначим через u_1, u_2, $u_3, \ldots, u_n$ площади, ограниченные с двух сторон четными (на чертеже жирными) ординатами. По формуле (3) имеем:

$$u_1 = \frac{h}{3}(y_0 + y_2 + 4y_1),$$

$$u_2 = \frac{h}{3}(y_2 + y_4 + 4y_3),$$

. . . .

$$u_{n-1} = \frac{h}{3}(y_{2n-4} + y_{2n-2} + 4y_{2n-3}),$$

$$u_n = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + y_{2n} + 4y_{2n-1}).$$

Складывая все эти равенства, получаем следующую формулу для приближенного вычисления интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{h}{3}\{(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\}.$$

Эта формула называется формулой Симпсона.

§ 127. Заключение.

Теорема о диференцировании по параметру. Если a и b — постоянные, то

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Если a и b — функции параметра y, то

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = f(b, y)\frac{db}{dy} - f(a, y)\frac{da}{dy} + \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Теорема об интегрировании по параметру. Если пределы интегралов постоянны, то

$$\int_\alpha^\beta \left\{\int_a^b f(x, y)\,dx\right\} dy = \int_a^b \left\{\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\right\} dx.$$

Интеграл Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ПОРЯДКИ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ.

Бесконечно-малой величиной мы условились называть всякую вспомогательную переменную величину, которая в течение рассуждения мыслится как имеющая одно из возможных для нее значений и только в окончательной формуле предполагается бесконечно умаляющейся. Поэтому можно также сказать, что бесконечно-малое есть произвольно взятое значение бесконечно умаляющегося.

Как мы видели, существуют две основные задачи о бесконечно-малых: задача о вычислении предела отношения бесконечно-малых и задача о вычислении предела суммы бесконечно-малых в бесконечно большом числе. Первая задача повела к возникновению диференциального исчисления, вторая — интегрального. Но, несмотря на существование этих двух дисциплин, все-таки задачи о бесконечно-малых продолжают существовать как самостоятельные, потому что методы диференциального и интегрального исчислений не могут их решить во всех случаях.

Ниже мы рассмотрим те методы, применение которых дает возможность во многих случаях решить две основные задачи о бесконечно-малых. Эти методы опираются на понятие о порядках бесконечно-малых и на понятие об эквивалентных величинах*).

§ 128. Порядки бесконечно-малых.

Определение. Если предел отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ двух бесконечно-малых α и β конечен и не равен нулю, то говорят, что они одного и того же порядка малости. Если же этот предел равен нулю, то говорят, что порядок величины β выше, или больше, порядка величины α. Напротив, говорят, что порядок величины β меньше, или ниже, порядка величины α, если предел отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ бесконечен.

Следовательно, если

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=k,\quad \text{где } k\neq 0 \quad \text{и} \quad \neq\infty,$$

то β и α одного порядка; если

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0,$$

*) Прежде, чем приступить к изучению этой и следующих глав, необходимо перечесть из введения в анализ гл. XVIII и XIX.

то порядок β больше порядка α; если

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty ,$$

то порядок β ниже порядка α.

Говоря образно, порядок той величины больше, которая быстрей умаляется; порядки равны, если быстрота умаления одна и та же *).

Например, если x — бесконечно-малое, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{x} = 7,$$

а потому x и $\sin 7x$ одного порядка. Но, если

$$y = 3x^3 + x^5,$$

$$z = 5x^2 + x^4,$$

то

$$\frac{y}{z} = \frac{3x + x^3}{5 + x^2},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{y}{z} = 0,$$

а потому порядок y выше порядка z. В то же время

$$\lim_{x \to 0} \frac{z}{y} = \infty ,$$

а потому порядок z ниже порядка y. Не мешает вообще заметить, что если u и v — две такие бесконечно малые величины, что

$$\lim \frac{u}{v} = 0, \qquad (1)$$

то в таком случае необходимо

$$\lim \frac{v}{u} = \infty . \qquad (2)$$

Согласно определению из (1) следует, что порядок величины u выше порядка величины v, а из (2) — что порядок величины v ниже порядка величины u. Следовательно,

если из двух бесконечно-малых порядок одного выше порядка другого, то всегда порядок второго ниже порядка первого.

Мы видим, что данное нами определение высшего и низшего порядка не противоречит обычному значению слов „высший" и „низший".

Понятие порядка может быть уточнено. Пусть x бесконечно-малое. Рассмотрим различные положительные степени его:

$$x, \quad \sqrt{x}, \quad x^{\frac{2}{3}}, \quad x^4, \quad x^5, \ldots, x^n.$$

Если x бесконечно умаляется, то и всякая положительная степень его тоже бесконечно умаляется, причем тем быстрей, чем больше ее показатель. Так, например, когда x уменьшится в десять раз, то x^3 уменьшится в 1000 раз, а x^5 — в 100 000 раз.

---

*) Строго говоря, чтобы ссылаться на быстроту умаления, надо сначала определить, что *мы разумеем под этим понятием. В действительности не порядок определяется* быстротой умаления, а наоборот. Сказать, что β быстрее умаляется, чем α, это просто значит утверждать, что $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$.

Определение. **Бесконечно-малое β называется величиной порядка n относительно бесконечно-малого α, если оно и α^n одного порядка, т. е. если предел отношения $\frac{\beta}{\alpha^n}$ конечен и не равен нулю.**

В этом определении показатель n должен быть положительным, потому что α^n бесконечно умаляется только при положительном n. При отрицательном же показателе α^n стремится к ∞. Но будучи положительным, n может быть не только дробным, но и несоизмеримым. Следовательно,

порядок бесконечно-малого может быть любым положительным числом.

Но при этом надо твердо помнить, что

бесконечно-малое имеет тот или иной порядок не само по себе, а только относительно другого бесконечно-малого.

Одно и то же бесконечно-малое может иметь различные порядки *относительно различных бесконечно-малых.*

То бесконечно-малое, относительно которого вычисляются порядки других бесконечно-малых, называется основным, или главным.

Чтобы найти порядок β относительно α, надо найти такое n, чтобы предел отношения

$$\frac{\beta}{\alpha^n} \tag{3}$$

был конечен и не равен нулю. Возникает вопрос: всегда ли существует такое n?

В дальнейшем будем предполагать, что каждое из рассматриваемых бесконечно-малых имеет относительно любого из них некоторый вполне определенный порядок.

Увидим, однако, что существуют и такие бесконечно-малые, порядки которых относительно друг друга не могут быть выражены никаким конечным положительным числом.

§ 129. Бесконечно-малые элементарного типа.

Если α — основное бесконечно-малое и k — постоянное, не равное нулю, то величина

$$\delta = k\alpha^n,$$

очевидно, порядка n, потому что

$$\lim \frac{\delta}{\alpha^n} = k.$$

Величину $k\alpha^n$ мы назовем бесконечно-малой элементарного типа. Следовательно,

бесконечно-малая величина n-го порядка называется величиной элементарного типа, если она равна произведению степени основного бесконечно-малого на конечное постоянное, не равное нулю.

Таким образом, все величины

$$5\alpha^3,\quad 4\sqrt[3]{\alpha},\quad 7\alpha^{10},\quad 9\alpha\sqrt{\alpha}$$

будут бесконечно-малые элементарного типа соответственно порядков $3, \frac{1}{3}, 10, \frac{3}{2}$. В связи с этим заметим, что

если порядок величины β относительно α больше n, то β может быть представлена в форме:

$$\beta = \varepsilon\alpha^n, \tag{1}$$

где ε бесконечно мало. Обратно, если

$$\beta = \varepsilon\alpha^n$$

и ε бесконечно мало, то порядок β относительно α больше n.

Действительно, пусть

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = \varepsilon. \tag{2}$$

Если порядок β больше n, то по определению порядка

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = 0, \tag{3}$$

т. е. $\lim \varepsilon = 0$, а потому ε бесконечно мало.

Обратно, если ε — бесконечно-малое, то из (2) следует (3), а потому порядок β выше n.

§ 130. Разложение бесконечно-малого.

Пусть β — порядка n относительно α. Следовательно,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = k, \quad k \neq 0 \text{ и } \neq \infty. \tag{1}$$

Пусть до перехода к пределу

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = k + \varepsilon. \tag{2}$$

Ясно, что $\lim \varepsilon = 0$, а потому ε есть бесконечно-малое. Из (2) следует

$$\beta = k\alpha^n + \varepsilon\alpha^n, \tag{3}$$

или

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1, \tag{4}$$

где

$$\beta_1 = \varepsilon\alpha^n. \tag{5}$$

Так как ε бесконечно-малое, то порядок величины β_1 выше n.

Первое слагаемое в (4) есть бесконечно-малое элементарного типа. Получается

Теорема. **Всякое бесконечно-малое β порядка n относительно бесконечно-малого α может быть разложено на сумму двух слагаемых:**

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1, \tag{4'}$$

из которых первое элементарного типа и того же порядка как и данная величина β, второе же слагаемое β_1 более высокого порядка. Оно может быть представлено в форме

$$\beta_1 = \varepsilon \alpha^n, \tag{5'}$$

где ε бесконечно мало.

В разложении

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1$$

элементарное слагаемое, т. е. слагаемое $k\alpha^n$, называется главной частью величины β.

Увидим, что понятие о главной части играет большую роль благодаря тому, что оно всегда очень простого типа и в то же время отличается от β только на величину более высокого порядка.

Разложение

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1 \tag{6}$$

нами получено для любого бесконечно-малого. Поэтому мы можем применить его и к величине β_1. Применяя его и обозначая через n_1 порядок величины β_1, причем $n_1 > n$, имеем

$$\beta_1 = k_1\alpha^{n_1} + \beta_2, \tag{7}$$

где k_1 конечно и не нуль и β_2 — некоторое бесконечно-малое, порядок которого выше порядка n_1. Пусть он равен n_2.

Применяя разложение (4) к β_2, имеем:

$$\beta_2 = k_2\alpha^{n_2} + \beta_3, \tag{8}$$

где k_2 конечно и не нуль и β_3 порядка большего, чем порядок β_2.

К этой величине β_3 мы можем тоже применить разложение (4). Поступая таким образом несколько раз, мы получим равенства:

$$\begin{aligned}
\beta &= k\alpha^n + \beta_1, \\
\beta_1 &= k_1\alpha^{n_1} + \beta_2, \\
\beta_2 &= k_2\alpha^{n_2} + \beta_3, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\beta_h &= k_h\alpha^{n_h} + \beta_{h+1}.
\end{aligned}$$

Складывая их, получаем теорему:

Всякое бесконечно-малое β может быть представлено в следующей форме:

$$\beta = k\alpha^n + k_1\alpha^{n_1} + k_2\alpha^{n_2} + \ldots + k_h\alpha^{n_h} + \beta_{h+1}, \tag{9}$$

где $k\alpha^n$ — главное бесконечно-малое и где показатели положительны, причем каждый больше своего предыдущего:

$$n < n_1 < n_2 < \cdots < n_h.$$

Что касается коэфициентов

$$k, \quad k_1, \quad k_2, \ldots, k_h,$$

то каждый из них конечен и не равен нулю.

Последнее слагаемое β_{h+1} есть бесконечно-малое, порядок которого больше порядка предпоследнего слагаемого.

В равенстве (9) последнее слагаемое β_{h+1} мы можем представить в свою очередь в форме:

$$\beta_{h+1}=k_{h+1}\alpha^{n_{h+1}}+\beta_{h+2}.$$

Если пожелаем, то с β_{h+2} мы можем поступить точно так же. Вообще мы можем вычислить в (9) столько членов, сколько пожелаем.

Когда β представлено в форме (9), то говорят, что β разложено с точностью до бесконечно-малых порядка высшего, чем n_h.

Разложение (9) весьма замечательно. Зависимость величины β от α может быть сложного характера. Но как бы она ни была сложна, всегда величина β может быть представлена в виде суммы, все слагаемые которой, за исключением последнего,—элементарного типа. Что касается последнего, то разложение всегда может быть проведено так далеко, чтобы порядок этого последнего был как угодно велик.

§ 131. Порядок приращения функции.

Пусть $y=f(x)$ — непрерывная функция. Если $h=\Delta x$, то

$$\Delta y=f(x+h)-f(x). \tag{1}$$

Приращение функции есть функция двух переменных: самого независимого переменного x и его приращения Δx.

Но если переменному x мы дадим какое-нибудь значение c, то получим:

$$(\Delta y)_c=f(c+h)-f(c) \tag{2}$$

и $(\Delta y)_c$ будет уже функцией только одного h.

Приращение функции при $x=c$ называется приращением функции в точке c.

Приращение функции в точке есть уже функция только одного переменного, а именно приращения независимого переменного.

Из (2) ясно, что если $h\to 0$, то и $\Delta y\to 0$, а потому

если приращение Δx независимого переменного бесконечно мало, то и приращение непрерывной функции тоже бесконечно мало.

Рассмотрим порядок приращения Δy относительно приращения Δx. По строке Тейлора *)

$$f(c+h)=f(c)+hf'(c)+\ldots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}+\frac{h^n f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}.$$

Удерживая только два члена, имеем:

$$(\Delta y)_c=f'(c)\,h+\frac{h^2}{2}f''(c+\theta h).$$

Второе слагаемое порядка выше первого, первое же слагаемое — первого порядка, если только случайно точка c не такова, что $f'(c)=0$. Но если $f'(c)\neq 0$, то $f'(c)\,h$ есть главная часть. Но

$$dy=f'(x)\,h$$

---

*) Лица, еще не знакомые со строкой Тейлора, могут этот и следующий параграф пропустить.

и $f'(c)h$ есть значение диференциала функции в точке c; обозначая это назчение на время через $d_c y$, имеем

$$(\Delta y)_c = dy_c + \frac{h^2}{2} f''(c + \theta h).$$

Теорема. **Приращение функции в любой точке относительно приращения независимого переменного — вообще первого порядка.**

Диференциал функции вообще есть главная часть функции.

Таким образом, какое бы значение x ни имело, вообще

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x = df(x) + \varepsilon\Delta x, \tag{3}$$

где ε — бесконечно-малое. Мы говорим „вообще" потому, что теорема не верна для тех исключительных точек, в которых $f'(x) = 0$. Но пусть c — такая точка, что

$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0,$$

но $f^{(k)}(c) \neq 0$. Тогда для этой точки

$$(\Delta y)_c = \frac{h^k f^{(k)}(c)}{k!} + \frac{h^{k+1} f^{(k+1)}(c + \theta h)}{(k+1)!},$$

и $(\Delta y)_c$ уже порядка k. Следовательно,

только в виде исключения порядок приращения функции может не быть первого порядка.

Если мы находим возможным пренебрегать бесконечно-малыми второго порядка, то из (3) следует:

С точностью до бесконечно-малых порядка выше первого приращение функции равно диференциалу функции:

$$\Delta f(x) = df(x) + \ldots$$

Как раз в этом свойстве диференциала и заключается ценность его.

§ 132. О вычислении порядков.

Как можно вычислить порядок бесконечно-малого β относительно основного бесконечно-малого α, а также как можно найти разложение β на сумму бесконечно-малых элементарного типа?

Мы все время предполагали, что рассматриваемые бесконечно-малые являются функциями одного переменного. Но если β и α — функции одного переменного, то β можно выразить как функцию от α. Пусть

$$\beta = \varphi(\alpha).$$

Так как $\beta \longrightarrow 0$, если $\alpha \longrightarrow 0$, то необходимо $\varphi(\alpha) \longrightarrow 0$.

Если теперь окажется, что функцию $\varphi(\alpha)$ можно разложить в строку *Маклорена*, для чего необходимо, чтобы все ее соответствующие производные при $\alpha = 0$ были конечны, то

$$\beta = \varphi'(0)\alpha + \frac{\varphi''(0)}{2}\alpha^2 + \ldots + \frac{\varphi^h(0)}{h!}\varphi^{(h)}(\theta\alpha).$$

Пусть из значений производных в точке нуль, т. е. из значений

$$\varphi'(0),\ \varphi''(0),\ \varphi'''(0), \ldots, \tag{1}$$

первое, не равное нулю, будет $\varphi^{k}(0)$. Тогда

$$\beta = p\alpha^{k} + p_{1}\alpha^{k+1} + \ldots + p_{h-1}\alpha^{h-1} + \varepsilon_{h}\alpha^{h},$$

и β разложена по степеням α, где первое слагаемое есть главная часть.

Но если разложение по строке Маклорена невозможно, то тогда часто удается β представить в форме

$$\beta = \alpha^{m}\psi(\alpha)$$

так, что $\psi(\alpha)$ уже разлагается в ряд. Пусть, например,

$$\beta = 1 - \cos\alpha.$$

Так как

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^{2}}{2!} + \frac{\alpha^{4}}{4!} - \frac{\alpha^{6}}{6!} + \ldots,$$

то

$$\beta = \frac{\alpha^{2}}{2} - \frac{\alpha^{4}}{4!} + \ldots,$$

и ясно, что главная часть равна $\frac{\alpha^{2}}{2}$.

Пусть

$$\beta = \sqrt{\alpha - \sin\alpha}.$$

Так как

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^{3}}{3!} + \alpha^{5}g,$$

где относительно g нам достаточно знать, что это — конечная величина, то

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha^{3}}{6} - \alpha^{5}g} = \alpha^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{6} - \alpha^{2}g}.$$

Когда $\alpha \longrightarrow 0$, то предел второго множителя равен $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Поэтому

$$\sqrt{\frac{1}{6} - \alpha^{2}g} = \frac{1}{\sqrt{6}} + \varepsilon,$$

где ε бесконечно умаляется, когда $\alpha \longrightarrow 0$. Теперь имеем

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha^{\frac{3}{2}} + \varepsilon\alpha^{\frac{3}{2}}.$$

Ясно, что β порядка $\frac{3}{2}$ и что $\frac{1}{\sqrt{6}}\alpha^{\frac{3}{2}}$ — главная часть.

Подобными приемами часто удается найти порядок бесконечно-малого и его главную часть.

§ 133. Порядки бесконечно-больших.

Понятие о порядке бесконечно-больших вводится аналогично понятию о порядках бесконечно-малых.

Бесконечно-большой величиной мы называли произвольное значение переменной величины, модуль которой бесконечно возрастает.

Говорят, что две бесконечно-большие величины u и v одного порядка, если

$$\lim\frac{u}{v} = k,$$

где k конечно и не нуль. Если же

$$\lim \frac{u}{v} = 0,$$

то говорят, что порядок величины u ниже порядка величины v. Если же

$$\lim \frac{u}{v} = \infty,$$

то говорят, что порядок величины u выше порядка величины v. Если

$$\lim \frac{u}{v^n} = k,$$

где k конечно и не нуль, то говорят, что u порядка n относительно v.

Из этого определения, как и для бесконечно-малых, можно вывести возможность разложения бесконечно-большой величины на сумму слагаемых различных порядков, но мы на этом не будем останавливаться.

§ 134. О величинах, не имеющих порядка.

Всякая ли величина имеет относительно другой порядок?

Пусть x бесконечно возрастает и пусть

$$y = e^x.$$

В таком случае y тоже бесконечно возрастает. Следовательно, мы имеем две бесконечно возрастающие величины. Спрашивается: какой порядок имеет y относительно x? Легко доказать, что какое бы положительное число m мы ни взяли, отношение

$$\frac{y}{x^m}$$

всегда стремится к бесконечности, т. е., иными словами, y возрастает быстрей, чем любая положительная степень x. Действительно, какое бы ни было положительное число m, всегда можно найти целое число, большее, чем оно. Пусть n — такое целое число.

Будем рассматривать процесс бесконечного возрастания x с того момента, начиная с которого $x > 1$. С этого момента, если $n > m$, то

$$x^n > x^m,$$

а потому

$$\frac{e^x}{x^m} > \frac{e^x}{x^n}. \qquad (1)$$

Но по строке Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Отбросим в правой части все члены, кроме одного: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Так как все члены положительны, то

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

а потому

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}.$$

Из (1) следует, что

$$\frac{e^x}{x^m} > \frac{x}{(n+1)!}, \tag{2}$$

и теперь ясно, что если $x \longrightarrow \infty$, то

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty. \tag{3}$$

Следовательно, e^x возрастает быстрее, чем x^m, а потому порядок возрастания величины e^x больше m. Но m — произвольно взятое положительное число. Заключаем:

Порядок возрастания показательной функции e^x относительно бесконечно возрастающего показателя больше всякого конечного числа, потому что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty \tag{4}$$

при всяком m. Поэтому говорят, что ее порядок бесконечен.

Рассмотрим теперь, какого порядка $\ln x$, когда $x \longrightarrow +\infty$.

Возьмем отношение

$$\frac{\ln x}{x^m}, \quad m > 0.$$

Применяя правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^m} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{mx^m} = 0.$$

Мы имеем результат, обратный предыдущему:

Порядок возрастания функции $\ln x$ относительно своего аргумента меньше всякого конечного числа, потому что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^m} = 0 \tag{5}$$

при всяком положительном m, как бы мало оно ни было.

Равенства (4) и (5) необходимо заметить. Пользуясь ими, часто очень легко разобраться в порядках и в истинных значениях неопределенных выражений. Так, например, пусть $x \longrightarrow 0$; тогда $\ln x \longrightarrow -\infty$. Спрашивается: чему равен предел произведения

$$x^m \ln x? \tag{6}$$

Здесь x необходимо положителен, потому что логарифм может быть взят только от положительного числа. Полагая

$$x = \frac{1}{z}, \quad z = \frac{1}{x},$$

имеем:

$$x^m \ln x = -\frac{\ln z}{z^m}. \tag{7}$$

Когда $x \longrightarrow 0$, то $z \longrightarrow +\infty$, а потому правая часть, согласно (5), имеет пределом нуль. Заключаем:

Какое бы ни было положительное число m, всегда

$$\lim_{x \to 0} (x^m \ln x) = 0. \tag{8}$$

Из изложенного ясно, что бесконечно возрастающие величины могут не иметь конечных порядков. Легко видеть, что то же самое справедливо и для бесконечно умаляющихся.

Возможны бесконечно умаляющиеся, не имеющие конечного порядка.

Примеры их нам дадут величины, обратные бесконечно возрастающим величинам e^x и $\ln x$.

Пусть α — положительное бесконечно-малое и пусть

$$\beta = e^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \gamma = \frac{1}{\ln \alpha}. \tag{9}$$

Когда α стремится к нулю, то β и γ бесконечно умаляются.
Пусть

$$x = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{x}.$$

Когда $\alpha \to 0$, принимая по условию только положительные значения, то $x \to +\infty$. Имеем, какое бы ни было положительное n, всегда

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma}{\alpha^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^n}{\ln x} = -\infty.$$

Видим, что порядок величины β больше всякого произвольно взятого n, а порядок γ меньше его.

Величины β и γ не имеют порядка относительно α. Но заметим, что величинами типа (9) и составленными из них исчерпываются те величины, не имеющие порядка, с которыми приходится встречаться в приложениях.

§ 135. Понятие „конечной величины".

В связи с понятием бесконечно-малого остановимся на понятии конечного.

Математические книги и разговорный язык пестрят словами, имеющими тот же общий корень, что и слова „конечный" и „бесконечный". Эти слова употребляются в самых разнообразных смыслах и, к сожалению, благодаря укоренившимся традициям, нет никакой возможности избежать при употреблении этой многозначности их.

В математике тоже постоянно говорят о конечных и бесконечных числах и величинах, притом как постоянных, так и переменных. Необходимо твердо помнить, что в приложениях к постоянным величинам термин „конечный" значит не то же, что в приложении его к переменным. Рассмотрим эти его различные значения.

Хотя Анализ постоянно говорит о величинах, но с самими величинами мы имеем дело только в приложениях Анализа; в самом же Анализе мы имеем дело не с величинами, а с их числовыми выражениями, т. е. с числами.

В приложении к числам в Анализе прилагательное „конечный" имеет вполне определенный, точный смысл.

Так как символ ∞, называемый символом бесконечности, иногда также называют бесконечным числом, то остальные числа в отличие от него называют конечными.

Таким образом, в Анализе понятие „конечный", когда оно прилагается к числам, имеет вполне определенный смысл. Всякое число конечно, за исключением одного числа. Что же касается этого исключения, то оно имеет место только в том случае, если символ бесконечности называть тоже числом, чего, быть может, лучше избегать.

Но заметим, что называть ли символ бесконечности числом или не называть его так, во всяком случае его нельзя называть бесконечно большим числом, потому что бесконечно-большое по нашей терминологии прежде всего переменное, отнюдь не постоянное. Число же по своей сущности есть нечто постоянное. Итак,

к о н е ч н ы м н а з ы в а е т с я в с я к о е ч и с л о, к р о м е ч и с л а, о б о з н а ч а е м о г о с и м в о л о м б е с к о н е ч н о с т и.

В приложениях к постоянным величинам понятие „конечный“ тоже имеет вполне определенный смысл. Постоянная величина конечна, если конечно ее числовое выражение. Поэтому, например, все отрезки принадлежат к классу конечных величин.

Но в приложениях к переменным величинам понятие „конечное“ теряет свою определенность, потому что в этом случае оно употребляется в двух смыслах: в широком и узком. От смешения их могут происходить и постоянно происходят самые тяжелые недоразумения.

Переменное называется конечным в широком смысле слова, если оно может принимать только конечные числовые значения.

В этом смысле слова бесконечно возрастающая величина, например абсцисса точки, уходящей по оси X вправо в бесконечность, есть конечная величина, потому что, бесконечно возрастая, она в процессе своего изменения принимает только конечные числовые значения.

Точно так же и бесконечно умаляющаяся величина есть всегда конечная в широком смысле слова, потому что различные числовые значения, принимаемые ею, конечны.

Таким образом, оказывается, что переменные величины вообще всегда конечны в широком смысле слова, а потому в этом смысле слова применять прилагательное „конечная“ к переменным величинам в значительной степени бесцельно.

Понятие „конечная“ в приложении к переменным величинам мы в дальнейшем будем употреблять только в узком смысле слова.

В Анализе конечной переменной величиной в узком смысле слова называют всякую переменную величину, модуль которой заключен между двумя положительными числами.

Следовательно, сказать, что переменная величина x конечна, это значит утверждать, что существуют два таких положительных числа m и M, что всегда

$$m \leq |x| \leq M.$$

Поэтому можно также сказать, что

переменная величина называется конечной в узком смысле слова, если она не может принимать ни как угодно малых значений, ни как угодно больших.

Согласно с этим пониманием конечной величины бесконечно большую величину уже нельзя называть конечной, потому что она может принимать значения, большие всякой наперед заданной величины. Точно так же и бесконечно малая величина не есть конечная величина, потому что она может принимать значения, модуль которых меньше всякой наперед заданной величины.

В свою очередь конечная переменная величина, не имея права принимать сколь угодно больших и сколь угодно малых значений, не может быть ни бесконечно малой, ни бесконечно большой.

Только в узком смысле и будет в дальнейшем употребляться понятие „конечный“.

§ 136. Заключение.

1. Бесконечно малой величиной называется всякая вспомогательная переменная величина, которая в течение доказательства мыслится как имеющая одно из возможных для нее значений и которая в окончательных формулах предполагается бесконечно умаляющейся.

Прилагательное „бесконечно малая“ не указывает на какое-нибудь особое свойство величины, тем более на ее чрезвычайную малость, а только на роль величины в доказательстве.

Определение. Бесконечно-малые β и α одного порядка, если

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k, \quad k \neq 0 \quad \text{и} \quad \neq \infty.$$

Порядок β выше порядка α, если

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0,$$

и ниже, если

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty.$$

Бесконечно-малое β—порядка n относительно α, если оно одного порядка с α^n, т. е. если

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = k, \quad k \neq 0 \quad \text{и} \quad \neq \infty.$$

Всякое бесконечно-малое β может быть относительно основного бесконечно-малого α представлено в форме

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1,$$

где k конечно и не нуль и где β_1 порядка выше n.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Для решения двух основных задач о бесконечно-малых еще большее значение, чем понятие порядка, имеет понятие эквивалентности. Это понятие при вычислениях с бесконечно-малыми заменяет в известной степени понятие равенства.

§ 137. Эквивалентные величины.

***Определение.* Переменная величина u называется равносильной, или эквивалентной, величине v, если предел отношения первой ко второй равен единице.**

Чтобы записать, что u эквивалентно v, будем пользоваться знаком

$$\approx,$$

состоящим из двух изогнутых горизонтальных черточек. Его назовем знаком эквивалентности. Запись

$$u \approx v$$

должна читаться так: „u эквивалентно v“. Пользуясь ею, приведенное определение можно формулировать так:

По определению

$$u \approx v \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim \frac{u}{v} = 1. \tag{2}$$

По существу записи (1) и (2) выражают в различных формах одну и ту же идею.

Согласно определению запись

$$u \approx v \tag{3}$$

значит не то же, что запись

$$v \approx u, \tag{4}$$

потому что (3) значит, что

$$\lim \frac{u}{v} = 1, \tag{5}$$

а (4) — что

$$\lim \frac{v}{u} = 1. \tag{6}$$

Но если имеем (5), то имеем и (6), а потому

***Теорема.* Если $u \approx v$, то $v \approx u$.**

Относительно знака „$\approx$“ заметим, что значение его не является общепринятым. Им пользуются для разнообразных целей всякий раз, как недостает общепринятых знаков, и различные авторы приписывают ему различные значения. Мы всегда будем употреблять его только как знак эквивалентности.

Понятие эквивалентности применимо к самым разнообразным величинам, и не только к величинам, имеющим пределы, но и к величинам, не имеющим их. Это видно из следующих примеров.

Примеры. 1. Если x бесконечно умаляется, то

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а потому

$$\sin x \approx x.$$

Следовательно, эквивалентные величины могут быть бесконечно умаляющимися.

2. Пусть x бесконечно возрастает и пусть

$$u = a + \frac{1}{x}, \quad v = \frac{ax^2 + 1}{x^2 + x} = \frac{a + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}},$$

где $a \neq 0$. Имеем

$$\lim u = a, \quad \lim v = a,$$

а потому

$$\lim \frac{u}{v} = 1,$$

т. е. $u \approx v$. Следовательно, эквивалентные величины могут иметь конечные пределы.

3. Пусть $x \to \infty$ и пусть

$$u = x^3 + 1, \quad v = x^3 + 5\sqrt{x} + 7.$$

Ясно, что

$$\lim u = \lim v = \infty$$

и что

$$\lim \frac{u}{v} = \lim \frac{x^3 + 1}{x^3 + 5\sqrt{x} + 7} = \lim \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{5}{x^2\sqrt{x}} + \frac{7}{x^3}} = 1,$$

а потому $u \approx v$. Следовательно, эквивалентные величины могут иметь бесконечные пределы.

4. Пусть $x \to \infty$ и

$$u = \sin x, \quad v = \frac{x}{1 + x} \sin x.$$

Тогда u и v не имеют пределов, но

$$\lim \frac{u}{v} = \lim \frac{1 + x}{x} = 1,$$

а потому $u \approx v$. Следовательно, эквивалентные величины могут не иметь пределов.

Понятие эквивалентности наиболее ценно в приложении к бесконечно-малым.

Две бесконечно малые величины называются эквивалентными, если, когда они станут в окончательной формуле бесконечно умаляющимися, то предел отношения их равен единице.

Отметим, что
величин, эквивалентных нулю, нет.
Действительно, если

$$u \approx 0,$$

то это должно значить, что

$$\lim \frac{0}{u} = 1, \quad \text{но} \quad \lim \frac{0}{u} = 0.$$

***Теорема.* Если аргумент функций синуса, тангенса, арксинуса и арктангенса бесконечно мал, то функции эквивалентны ему. Следовательно, если x бесконечно мал, то**

$$\sin x \approx x, \quad \operatorname{tg} x \approx x, \quad \arcsin x \approx x, \quad \operatorname{arc\,tg} x \approx x.$$

Действительно, имеем

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а потому $\sin x \approx x$. Далее, имеем

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1,$$

а потому $\operatorname{tg} x \approx x$. Полагая $y = \arcsin x$, имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1,$$

а потому $\arcsin x \approx x$. Полагая $y = \operatorname{arc\,tg} x$, имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1,$$

а потому $\operatorname{arc\,tg} x \approx x$.

Теорема доказана. Согласно ей, если x бесконечно мал, то

$$\sin(\sqrt{x}) \approx \sqrt{x},$$

потому что $\sqrt{x}$ — аргумент синуса — бесконечно мал. Точно так же, если x бесконечно мал, то бесконечно малы и величины $7x$, $5x^2$, $x\sqrt{1+x^2}$, а потому

$$\sin(7x) \approx 7x, \quad \arcsin(5x^2) \approx 5x^2, \quad \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{1+x^2}) \approx x\sqrt{1+x^2}.$$

§ 138. Основные теоремы об эквивалентных величинах.

Этих теорем очень немного и все они легко доказываются, опираясь на определение, согласно которому $u \approx v$, если

$$\lim \frac{u}{v} = 1.$$

***Теорема.* Если $u \approx v$, то $v \approx u$.**

Эту теорему мы уже доказали. Она вытекает из того, что если

$$\lim \frac{u}{v} = 1, \quad \text{то} \quad \lim \frac{v}{u} = 1.$$

Теорема. **Всякая величина эквивалентна самой себе. Следовательно, $u \approx u$,**

потому что $\lim \frac{u}{u} = 1$.

Теорема. **Две равные величины эквивалентны,**

потому что, если $u = v$, то $\lim \frac{u}{v} = 1$.

Теорема. **Две величины, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой.**

Пусть

$$u \approx w, \quad v \approx w.$$

Следовательно,

$$\lim \frac{u}{w} = 1, \quad \lim \frac{v}{w} = 1.$$

Но

$$\frac{u}{v} = \left(\frac{u}{w}\right)\left(\frac{w}{v}\right),$$

откуда

$$\lim \frac{u}{v} = 1,$$

а потому $u \approx v$, и теорема доказана. Она и предыдущие удивительно напоминают соответствующие теоремы о равных величинах, но две следующие очень важные теоремы уже не имеют аналогичных теорем в теории равных величин.

Теорема. **Величина, промежуточная между двумя эквивалентными величинами, эквивалентна им.**

Пусть w — величина, промежуточная между u и v, и пусть

$$u \approx v. \tag{1}$$

Требуется доказать, что

$$w \approx u \approx v.$$

Мы имеем *)

$$w = u + \theta(v - u), \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда

$$\frac{w}{u} = 1 + \theta\left(\frac{v}{u} - 1\right),$$

и так как согласно (1)

$$\lim \frac{v}{u} = 1,$$

---

*) При выводе теоремы Лагранжа мы доказали, что всякое число ξ, промежуточное между a и b, может быть представлено в форме

$$\xi = a + \theta(b - a).$$

то

$$\lim \frac{w}{u} = 1,$$

а потому $w \approx u$, и теорема доказана. Опираясь на нее, можно так доказать известное равенство

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2}$$

Пусть x бесконечно умаляется. Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1,$$

а потому

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x,$$

и так как

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

то

$$\sin x \approx x,$$

т. е. (2).

В дальнейшем, если ε — разность между β и β':

$$\beta' = \beta + \varepsilon,$$

то будем говорить, что β' отличается от β на ε.

Теорема об эквивалентности. **Если в произведении $\beta\alpha$ конечного *) фактора β на бесконечно малый множитель α заменим фактор β бесконечно мало от него отличающимся фактором β', а бесконечно малый множитель α — эквивалентным множителем α', то получим произведение $\beta'\alpha'$, эквивалентное данному произведению $\beta\alpha$. Следовательно, если**

$$\alpha \approx \alpha', \quad \beta = \beta' + \varepsilon, \tag{3}$$

где фактор β конечен и где ε бесконечно мало, то

$$\beta\alpha \approx \beta'\alpha'. \tag{4}$$

Имеем

$$\frac{\beta\alpha}{\beta'\alpha'} = \frac{(\beta' + \varepsilon)\alpha}{\beta'\alpha'}.$$

Следовательно,

$$\frac{\beta\alpha}{\beta'\alpha'} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\beta'}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right).$$

Так как $\lim \varepsilon = 0$ и $\alpha \approx \alpha'$, то

$$\lim \frac{\beta\alpha}{\beta'\alpha'} = 1,$$

а потому (4).

Теорема. **Две бесконечно-малые β и α эквивалентны, если разность между ними порядка выше каждого из них.**

---

*) Следовательно, фактор β не может принимать сколь угодно малых значений.

Пусть $\beta = \alpha + \varepsilon$ и порядок ε выше порядка α. Следовательно,

$$\lim \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0.$$

Имеем

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{\alpha}\right) = \lim \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = 1,$$

и потому $\beta \approx \alpha$.

***Теорема.* Бесконечно-малое эквивалентно своей главной части.**

Действительно, если

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1,$$

то порядок β_1 выше, чем n, а потому по предыдущей теореме $\beta \approx k\alpha^n$.

Эта теорема ясно показывает, какое значение для понятия эквивалентности имеет понятие порядка. Если β — бесконечно-малое, зависящее от α, то эта зависимость может быть сложного характера, но главная часть всегда имеет очень простое выражение. Пусть, например,

$$\beta = \sqrt{1 + \alpha^3} - 1 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{1 + \alpha^3} + 1}. \tag{5}$$

Имеем

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \alpha^3}} = \frac{1}{2},$$

и потому

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha^3 + \varepsilon\alpha^3,$$

где ε — бесконечно мало. Главной частью величина β имеет $\frac{1}{2}\alpha^3$. Следовательно,

$$\beta \approx \frac{1}{2}\alpha^3,$$

и мы нашли для β очень простую эквивалентную ей величину.

§ 139. Первый принцип.

Для решения первой основной задачи, т. е. для вычисления предела отношения бесконечно-малых, имеет большое значение теорема, которая известна как

***Первый принцип исчисления бесконечно-малых.* При вычислении предела отношения, членами которого служат произведения бесконечно-малых, можно каждый бесконечно малый множитель заменять эквивалентной ему величиной. Следовательно, если $\alpha, \beta, \ldots, \gamma, u, v, \ldots,$ w — данные бесконечно-малые и если $\alpha', \beta', \ldots, \gamma', u', v', \ldots, w'$ — соответственно эквивалентные им величины, а именно, если**

$$\alpha \approx \alpha', \ \beta \approx \beta', \ldots, \ \gamma \approx \gamma', \ u \approx u', \ v \approx v', \ldots, \ w \approx w', \tag{1}$$

то

$$\lim \frac{\alpha \cdot \beta \ldots \gamma}{u \cdot v \ldots w} = \lim \frac{\alpha' \cdot \beta' \ldots \gamma'}{u' \cdot v' \ldots w'}. \tag{2}$$

Но это почти очевидно. Имеем

$$\frac{\alpha \cdot \beta \ldots \gamma}{u \cdot v \ldots w} = \frac{\alpha' \cdot \beta' \ldots \gamma'}{u' \cdot v' \ldots w'} \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)\left(\frac{\beta}{\beta'}\right) \ldots \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)\left(\frac{u'}{u}\right)\left(\frac{v'}{v}\right) \ldots \left(\frac{w'}{w}\right).$$

В правой части все множители в скобках, благодаря (1), в пределе равны единице, а потому имеем (2), и принцип доказан.

Пусть, например, требуется вычислить предел выражения

$$y=\frac{\sin(7\sqrt{x})\cdot\operatorname{arc\,tg}(x^3)}{\arcsin(2x^2)\cdot\operatorname{tg}(3x\sqrt{x})} \qquad (3)$$

при $x\to 0$.

Применяя доказанный принцип, мы вычислим искомый предел очень быстро. Мы знаем, что если v бесконечно умаляется, то

$$\sin v\approx\operatorname{tg}v\approx\arcsin v\approx\operatorname{arc\,tg}v\approx v.$$

Поэтому в нашем примере заменяем каждую тригонометрическую функцию эквивалентным ей аргументом. Получаем

$$\lim\frac{\sin(7\sqrt{x})\operatorname{arc\,tg}(x^3)}{\arcsin(2x^2)\operatorname{tg}(3x\sqrt{x})}=\lim\frac{7\sqrt{x}\cdot x^3}{2x^2\cdot 3x\sqrt{x}}=\frac{7}{6},$$

и задача решена.

В начале развития Анализа первый принцип имел очень большое применение. В настоящее время им тоже приходится пользоваться, но значительно реже.

Чтобы вычислить предел выражения (3), мы, рассуждая теоретически, могли бы применить правило Лопиталя. Но ясно, что это повело бы к очень длинным вычислениям.

§ 140. Диференциал функции.

Если $f'(x)$ — производная функции $y=f(x)$, то по определению

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x). \qquad (1)$$

Предполагаем, что x имеет одно из таких значений, при которых производная конечна и не равна нулю. Тогда, до перехода к пределу, если Δx имеет какое-нибудь значение, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{и} \quad f'(x)$$

вообще не равны между собой. Пусть ε — разность между ними:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon. \qquad (2)$$

Согласно (1), если Δx бесконечно умаляется, то ε тоже бесконечно умаляется. Говоря иначе, если Δx бесконечно мало, то и ε бесконечно мало. Деля (2) на $f'(x)$, имеем

$$\frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x}=1+\frac{\varepsilon}{f'(x)}.$$

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда

$$\lim \frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = 1.$$

Следовательно, до перехода к пределу

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

т. е.

$$\Delta y \approx dy. \tag{3}$$

Теорема. **Бесконечно малое приращение функции вообще эквивалентно ее диференциалу.**

Мы говорим „вообще“, потому что соотношение (3) перестает быть верным в тех исключительных случаях, когда $f'(x) = 0$ или ∞.

Большое значение диференциала проистекает из того, что если приращение Δx независимого переменного бесконечно мало, то приращение функции и ее диференциал эквивалентны.

Поэтому во всех тех случаях, когда величины можно заменить эквивалентными им, мы вместо приращения функции можем брать ее диференциал.

§ 141. Заключение.

1. *Определение*. Если u и v — переменные, то $u \approx v$, если

$$\lim \frac{u}{v} = 1.$$

Если x бесконечно мало, то

$$\sin x \approx x, \quad \operatorname{tg} x \approx x, \quad \arcsin x \approx x, \quad \operatorname{arctg} x \approx x.$$

2. Теоремы:

1) если $u \approx v$, то $v \approx u$;

2) $u \approx u$;

3) если $u = v$, то $u \approx v$;

4) если $u \approx w$ и $v \approx w$, то $u \approx v$;

5) величина, промежуточная между эквивалентными величинами, эквивалентна им.

3. *Теорема эквивалентности*. Если

$$\alpha \approx \alpha' \quad \text{и} \quad \beta = \beta' + \varepsilon,$$

где ε бесконечно мало и β конечно, то

$$\beta\alpha \approx \beta'\alpha'.$$

4. Всякое бесконечно-малое эквивалентно своей главной части.

5. Если два бесконечно-малых отличаются на величину, порядок которой выше одного из них, то они эквивалентны.

6. *Если приращение независимого переменного бесконечно мало, то приращение функции вообще эквивалентно диференциалу.*

7. ***Первый принцип.*** **При вычислении предела отношения произведений бесконечно-малых каждое бесконечно-малое можно заменять ему эквивалентным.**

ИНТЕГРАЛЬНАЯ СУММА И ВТОРОЙ ПРИНЦИП.

Мы перейдем ко второй задаче о бесконечно-малых — к задаче о вычислении предела сумм бесконечно умаляющихся слагаемых в бесконечно возрастающем числе.

§ 142. Суммы бесконечно умаляющихся слагаемых в бесконечно возрастающем числе.

С этими суммами мы будем иметь дело в течение всего дальнейшего курса и с ними же мы постоянно встречаемся во всех приложениях математики к механике и физике. Поэтому необходимо отчетливо выяснить содержание этого понятия.

На первый взгляд кажется, что предложение „пусть s есть сумма бесконечно умаляющихся слагаемых“ имеет ясный смысл не только тогда, когда число слагаемых постоянно, но и тогда, когда оно переменно. В действительности это далеко не так.

Если s — сумма постоянного числа слагаемых, например четырех:

$$s = x + y + z + v,$$

то вполне ясно, какой смысл имеет утверждение, что каждое слагаемое этой суммы умаляется. Но предположим, что от суммы трех слагаемых

$$4 + 8 + 15$$

мы переходим к сумме

$$1 + 3 + 4 + 9 + 10 + 17$$

шести слагаемых. Мы говорим, что при этом переходе все слагаемые изменились.

Спрашивается: что же они увеличились или уменьшились? В частном случае этот вопрос можно поставить относительно второго слагаемого первой суммы, равного 8. Что оно при переходе ко второй сумме уменьшилось или увеличилось?

Ясно, в чем затруднение. На поставленный вопрос мы не можем ответить, прежде чем не ответим на вопрос, каким слагаемым второй суммы заменилось слагаемое 8 первой суммы. Если мы считаем, что оно заменилось 3 или 4, то оно уменьшилось; если же будем считать, что оно заменилось 9 или 10, то оно увеличилось. Следовательно,

чтобы иметь право говорить о том, как изменяются слагаемые суммы s при изменении числа их n, надо предварительно условиться, что мы будем называть одним и тем же слагаемым, меняющим свои значения при изменении n.

Это затруднение легко преодолевается.

При изучении суммы s с переменным числом n слагаемых всегда предполагают, что предварительно при каждом значении числа n все слагаемые перенумерованы. Тогда при каждом n каждое слагаемое занимает некоторое определенное место, и мы получаем возможность говорить об изменении слагаемого, занимающего одно и то же место при всяком n.

При этом при чисто теоретических исследованиях совершенно безразлично, в каком порядке мы перенумеруем слагаемые. Фактически, когда мы рассматриваем действительно данные суммы, то слагаемые их обычно оказываются уже перенумерованными, благодаря тому закону, которым они даны.

Предположим же, что слагаемые суммы s перенумерованы. Пусть

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Теперь мы уже можем говорить об изменении первого, второго и вообще слагаемого a_k, стоящего на любом месте k.

При этом, конечно, если n возрастает, то слагаемое a_k появляется только с того момента, когда n становится равным или большим k.

Казалось бы, что теперь уже вполне ясно, что значит утверждение, что все слагаемые суммы

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

бесконечно умаляются при бесконечном возрастании n. Это значит, что каждое из них умаляется, а потому

$$\lim a_k = 0,$$

если $n \to \infty$, какое бы ни было k. И вот это оказывается неверно. Здесь мы подошли к самому трудному месту в теории сумм с переменным числом слагаемых. Оказывается, что если число слагаемых бесконечно возрастает, то тогда возможны такие суммы, что каждое слагаемое их, взятое в отдельности, бесконечно умаляется, но в то же время нельзя утверждать, что все слагаемые бесконечно умаляются. Но чтобы смысл этого утверждения был вполне ясен, необходимо предварительно точно условиться, что мы должны понимать, когда говорим, что все слагаемые бесконечно умаляются.

Говорят, что все слагаемые суммы

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

при бесконечном возрастании числа их n бесконечно умаляются, если, начиная с некоторого момента, модули всех их одновременно становятся сколь угодно малыми, т. е. меньше одного и того же произвольно наперед заданного положительного числа.

Между прочим, если все слагаемые бесконечно умаляются, то должно умаляться и наибольшее среди них по абсолютной величине.

Заметив это, рассмотрим такую простую сумму:

$$s = \frac{1}{2n} + \frac{2}{2n} + \frac{3}{2n} + \ldots + \frac{2n-2}{2n} + \frac{2n-1}{2n}.$$

Слагаемое, занимающее место k, обозначим через a_k:

$$a_k = \frac{k}{2n}.$$

Ясно, какое бы k ни было, если $n \to \infty$, то

$$\lim a_k = 0.$$

Следовательно, всякое слагаемое, стоящее на одном и том же месте, при всяком k бесконечно умаляется.

Но возьмем последнее слагаемое

$$a_{2n-1} = \frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}.$$

Ясно, что

$$\lim a_{2n-1} = 1.$$

Следовательно, это слагаемое не умаляется.

Возьмем слагаемое

$$a_n = \frac{n}{2n},$$

стоящее на n-м месте. При всяком n

$$a_n = \frac{1}{2},$$

а потому и это слагаемое тоже не умаляется. Мы видим, что нельзя *утверждать, что все слагаемые нашей суммы* бесконечно умаляются в своей совокупности. Легко в данном случае разобраться в кажущемся противоречии. Мы имеем

$$a_k = \frac{k}{2n}.$$

Ясно, что если $n \to \infty$ и если при этом k сохраняет одно и то же значение, то

$$\lim a_k = 0.$$

Но если k меняется вместе с n, то является большим вопросом, как при этом будет меняться a_k.

Как раз последнее слагаемое a_{2n-1} не есть слагаемое, занимающее в сумме одно и то же место при всяком n. Чтобы в равенстве

$$a_k = \frac{k}{2n}$$

мы могли a_k считать последним слагаемым, мы должны принять, что

$$k = 2n - 1,$$

т. е. мы должны считать, что индекс k меняется вместе с n. Но если $k = 2n - 1$, то

$$a_{2n-1} = 1 - \frac{1}{2n}, \quad \lim a_{2n-1} = 1.$$

Точно так же, когда мы рассматриваем слагаемое a_n, стоящее на n-м месте, то индекс его меняется с изменением n.

Мы видим, что слагаемое $a_k = \frac{k}{n}$ бесконечно умаляется, если k не меняется вместе с n. Но если k меняется вместе с n, то a_k может и не умаляться.

Рассмотренный пример учит тому, что возможны такие суммы с бесконечно возрастающим числом слагаемых, что их слагаемые a_k бесконечно умаляются только при постоянном k, но если k меняется вместе с n, то a_k может и не умаляться.

***Определение.* Говорят, что слагаемые суммы**

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

умаляются равномерно, если при бесконечном возрастании числа их n слагаемое a_k бесконечно умаляется, как бы при этом его индекс k ни менялся одновременно с изменением n.

Если же a_k бесконечно умаляется только при постоянном k, то говорят, что слагаемые умаляются неравномерно.

***Определение.* Интегральной суммой называется всякая сумма равномерно умаляющихся слагаемых в бесконечно возрастающем числе.**

Пусть a_h — то из слагаемых интегральной суммы, модуль которого наибольший. В общем случае h меняется вместе с n. По условию

$$\lim a_k = 0,$$

как бы k ни менялось вместе с n. Полагая $k = h$, имеем

$$\lim a_h = 0.$$

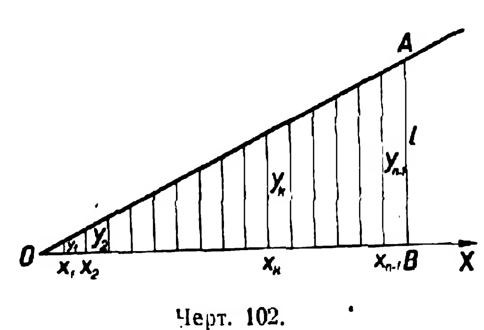
Следовательно,

в интегральной сумме бесконечно умаляется также и слагаемое, наибольшее по абсолютной величине.

Поэтому в интегральной сумме действительно умаляются все ее слагаемые, не только каждое отдельно, но и все в *своей совокупности.*

Изложенное наглядно можно пояснить таким геометрическим примером.

Из точки A прямой (черт. 102), проходящей через начало O, опустим на ось X перпендикуляр $AB = l$. Разделим отрезок OB точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на n равных частей и пусть $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ — ординаты прямой OA в этих точках.



Черт. 102.

Ясно, что

$$y_1 = \frac{l}{n}, \quad y_2 = \frac{2l}{n}, \quad y_3 = \frac{3l}{n}, \ldots$$

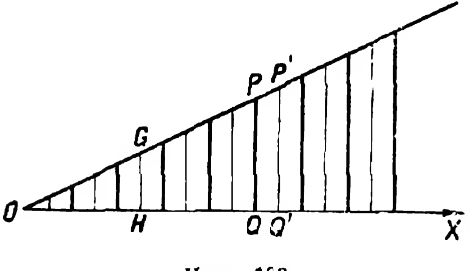
и вообще

$$y_k = \frac{kl}{n}.$$

Если k постоянно, то

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0.$$

И действительно, ордината, занимающая одно и то же место k, при увеличении n приближается к началу. Но если, меняя n, мы будем менять и k, то мы можем менять k так, что y_k не будет уменьшаться. Это вполне ясно, если мы дадим символу n два каких-нибудь определенных значения.



Черт. 103.

На чертеже 103 толстыми чертами изображены ординаты при $n=8$. Потом каждый подъинтервал разделен пополам и в точках деления восстановлены тонкие ординаты. Таким образом, одни толстые ординаты изображают числа y_k при $n=8$. Толстые и тонкие вместе дают числа y_k при $n=16$.

При $n=8$ число y_5 изобразится ординатой PQ, а при $n=16$ — ординатой GH. Ясно, что y_5 уменьшилось. Но если, переходя от $n=8$ к $n=16$, мы индекс 5 изменим, например, на 11, то от ординаты PQ мы перейдем к большей ординате $P'Q'$. Вообще на этом примере очевидно, что y_k умаляется только при постоянном k.

§ 143. Интегральная сумма и определенный интеграл.

Определение. **Интегральной суммой называем всякую сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, при переходе к пределу равномерно умаляющихся.**

Определенным интегралом в самом широком смысле называется предел всякой интегральной суммы.

Обыкновенно интегральная сумма s представляется суммой типа:

$$s=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3+\ldots+\beta_n\alpha_n,$$

каждое слагаемое которой есть произведение двух множителей. В своей совокупности эти множители распадаются на две системы: на систему величин

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n,$$

которые мы будем называть элементами интеграции, и на систему величин

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_n,$$

которые назовем факторами.

При переходе к пределу число слагаемых бесконечно возрастает. При этом элементы интеграции

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n$$

бесконечно умаляются в своей совокупности, благодаря чему бесконечно умаляются и все слагаемые. Что же касается факторов, то хотя в иных случаях они тоже бесконечно умаляются, но обыкновенно они не стремятся ни к какому пределу.

Если через α обозначим общий тип элемента интеграции, а через β — общий тип фактора, то слагаемые интегральной суммы будут типа $\beta\alpha$, а потому эта сумма может быть обозначена так:

$$s=\sum\beta\alpha,$$

что надо читать так: сумма слагаемых типа $\beta\alpha$.

В таком случае предел этой суммы, т. е. интеграл, обозначается так:

$$\int \beta\alpha,$$

причем у знака интеграла часто приписывают различные символы, имеющие целью более точное указание на условия получения этого интеграла.

Предел суммы абсолютных величин элементов интеграции, т. е. предел суммы

$$\sum|\alpha|=|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\ldots+|\alpha_n|,$$

мы будем называть областью интеграции *).

Рассмотрим, как известное нам понятие об определенном интеграле подходит под только что приведенное более широкое понятие.

Мы определили определенный интеграл как предел суммы:

$$s=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}. \tag{1}$$

Слагаемые этой суммы типа $f(x)\Delta x$. Поэтому-то предел этой суммы обозначают так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Стоит только положить

$$\alpha_1=\Delta x_0,\ \alpha_2=\Delta x_1,\ \ldots,\ \alpha_n=\Delta x_{n-1},$$
$$\beta_1=f(\xi_0),\ \beta_2=f(\xi_1),\ \ldots,\ \beta_n=f(\xi_{n-1}),$$

чтобы ясно видеть, что сумма s есть сумма типа:

$$s=\sum\beta\alpha,$$

т. е. интегральная сумма, где Δx_k — элементы интеграции, а $f(\xi_k)$ — факторы. Первые бесконечно умаляются, вторые нет. Сумма всех $|\Delta x_k|$ есть интервал (a, b), т. е. область интеграции.

§ 144. Лемма об интегральной сумме.

Если все факторы интегральной суммы

$$\sum\beta\alpha=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3+\ldots+\beta_n\alpha_n$$

в свою очередь равномерно бесконечно умаляются и если область интеграции, т. е. предел суммы $\sum|\alpha_k|$, конечна, то предел интегральной суммы равен нулю.

Пусть ε — наибольший модуль из модулей факторов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$. Так как по условию теоремы все факторы бесконечно умаляются и притом равномерно, то

$$\lim\varepsilon=0.$$

Модуль суммы меньше или равен сумме модулей слагаемых. Поэтому

$$\left|\sum\beta\alpha\right|\leq|\varepsilon_1|\,|\alpha_1|+|\varepsilon_2|\,|\alpha_2|+\ldots+|\varepsilon_n|\,|\alpha_n|.$$

---

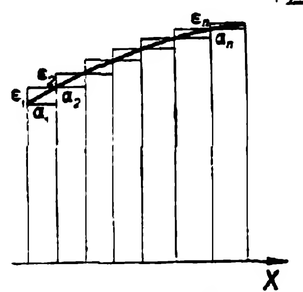
*) На это определение и на все дальнейшее в этой главе читатель должен обратить особое внимание. Изложенное здесь составляет сущность современного Анализа.

В правой части все слагаемые положительны. Мы ее увеличим, если все $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, ..., $|\varepsilon_n|$ заменим через ε. Получим:

$$|\sum \beta\alpha| \leqq \varepsilon \{ |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + \ldots + |\alpha_n| \},$$

или короче:

$$|\sum \beta\alpha| \leqq \varepsilon \sum |\alpha|.$$



Черт. 104.

Так как предел суммы $\sum |\alpha|$ по условию конечен и так как $\lim \varepsilon = 0$, то лемма доказана. Примером ее может служить сумма граничных прямоугольников, если через α_1, α_2, ..., α_n обозначить их основания, а через ε_1, ε_2, ..., ε_n — их высоты. Тогда их сумма будет типа

$$\sum \beta\alpha$$

и предел ее равен нулю.

§ 145. Второй принцип исчисления бесконечно-малых.

Если разность между a и b равна c, то будем говорить, что a отличается от b на c.

***Теорема.* При вычислении предела интегральной суммы, область интеграции которой конечна, можно все ее факторы заменить величинами, отличающимися от них бесконечно мало.**

Пусть имеем две интегральные суммы:

$$p = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \ldots + \beta_n\alpha_n,$$
$$q = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 + \ldots + \gamma_n\alpha_n$$

с одними и теми же элементами интеграции α_k, но с различными при них факторами и предположим, что все факторы β_k в своей совокупности бесконечно мало отличаются от соответствующих им факторов γ_k. Это значит, что все разности

$$\beta_1 - \gamma_1, \quad \beta_2 - \gamma_2, \quad \beta_3 - \gamma_3, \ldots, \beta_n - \gamma_n$$

равномерно бесконечно умаляются. Имеем:

$$p - q = (\beta_1 - \gamma_1)\alpha_1 + (\beta_2 - \gamma_2)\alpha_2 + (\beta_3 - \gamma_3)\alpha_3 + \ldots + (\beta_n - \gamma_n)\alpha_n.$$

В правой части все факторы бесконечно умаляются, а потому по только что доказанной лемме:

$$\lim(p - q) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim q = \lim p.$$

Но сумма q получается из суммы p заменой ее факторов β_k соответствующими им величинами γ_k. Теорема доказана.

***Теорема.* При вычислении предела интегральной суммы с конечной областью интеграции все элементы интеграции можно заменить соответственно эквивалентными им величинами.**

Пусть

$$p = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \ldots + \beta_n\alpha_n, \quad (1)$$
$$q = \beta_1\alpha'_1 + \beta_2\alpha'_2 + \beta_3\alpha'_3 + \ldots + \beta_n\alpha'_n \quad (2)$$

две суммы с одними и теми же факторами, но с различными элементами интеграции, причем $\alpha_k \approx \alpha'_k$ при всех k и, следовательно,

$$\lim \frac{\alpha'_k}{\alpha_k} = 1 . \tag{3}$$

Требуется доказать, что $\lim p = \lim q$. Пусть до перехода к пределу

$$\frac{\alpha'_k}{\alpha_k} = 1 + \varepsilon_k .$$

Из (3) следует $\lim \varepsilon_k = 0$, а потому все ε_k бесконечно малы. Имеем

$$\alpha'_k = \alpha_k + \varepsilon_k \alpha_k$$

и так как

$$p = \sum \beta_k \alpha_k, \quad q = \sum \beta_k \alpha'_k ,$$

то

$$q - p = \sum (\beta_k \varepsilon_k) \alpha_k .$$

В правой части все факторы $\beta_k \varepsilon_k$ бесконечно малы, а потому $\lim (q - p) = 0$, т. е.

$$\lim p = \lim q .$$

Соединяя эту теорему и предыдущую в одну, получаем теорему, которую назовем вторым принципом исчисления бесконечно умаляющихся.

Второй принцип. **При вычислении предела интегральной суммы с конечной областью интеграции можно факторы заменять величинами, бесконечно мало отличающимися от них, а элементы интеграции — эквивалентными им величинами.**

Можно сказать, что только благодаря этому принципу возможны все бесчисленные приложения Анализа к геометрии, механике и физике.

Как частный случай доказанного принципа отметим тот случай, когда все факторы в интегральной сумме

$$\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \ldots + \beta_n \alpha_n$$

равны единице, а все элементы положительны. Тогда получаем теорему:

При вычислении предела интегральной суммы

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

положительных бесконечно умаляющихся слагаемых в бесконечно возрастающем числе все слагаемые можно заменить эквивалентными им величинами.

В большинстве курсов под вторым принципом исчисления бесконечно умаляющихся разумеют как раз только эту теорему.

Как пример доказанного принципа рассмотрим следующую задачу. Пусть

$$s = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \sin \frac{3}{n^2} + \ldots + \sin \frac{n-1}{n^2} + \sin \frac{n}{n^2} ,$$

где n — целое число. Слагаемое, стоящее на k-м месте, будет

$$\alpha_k = \sin \frac{k}{n^2} , \quad 1 \leq k \leq n ,$$

и ясно, что наибольшим слагаемым будет последнее, равное $\sin\frac{1}{n}$. Положим, что n бесконечно возрастает и что требуется найти предел суммы s.

При бесконечном возрастании n число слагаемых, равное n, тоже бесконечно возрастает; в то же время слагаемые бесконечно умаляются. Но синус бесконечно умаляющейся дуги эквивалентен самой дуге. Следовательно, при вычислении предела суммы s мы имеем право заменить каждый синус его аргументом, а потому

$$\lim s = \lim\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right] = \lim\frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right\};$$

следовательно,

$$\lim s = \frac{1}{2},$$

и мы решили одним росчерком задачу, которую решить иным путем было бы затруднительно.

§ 146. Простой определенный интеграл.

Определенным интегралом, как было сказано, вообще называется предел всякой суммы бесконечно умаляющихся слагаемых в бесконечно возрастающем числе, т. е. предел всякой интегральной суммы.

В дальнейшем мы встретимся с разнообразными типами определенных интегралов. Тот же тип, с которым мы уже знакомы, т. е. определенный интеграл, который обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

очень часто, для отличия от других типов, называют простым определенным интегралом, или обыкновенным, или определенным интегралом от *функции одного переменного*.

Но в большинстве случаев как раз интегралы этого типа называют коротко определенными интегралами без всякого добавочного прилагательного; чаще же всего их называют просто интегралами. Что же касается интегралов иных типов, то для них в отличие от изученных нами вводят различные термины.

Вычисление интегралов самых разнообразных типов приводится в конце концов к вычислению изученных нами обыкновенных интегралов. Поэтому теория их приобретает особое значение для всей математики.

Мы рассмотрим еще раз некоторые их основные свойства с целью выяснить ту роль, которую в их теории играет понятие эквивалентных величин. Благодаря тому пути, который был нами избран для введения понятия об определенном интеграле, эта роль до сих пор оставалась в тени.

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

мы определили как предел следующей суммы:

$$s = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1}. \qquad (1)$$

причем при переходе к пределу предполагали, что число промежуточных чисел x_k бесконечно возрастает так, что промежутки между ними бесконечно умаляются.

Этот предел, как мы видели, не зависит от выбора чисел ξ_k, и в свое время мы убедились в этом, исходя из чисто геометрических соображений. Но теперь нетрудно видеть, что это есть простое следствие второго принципа.

В самом деле, рядом с суммой s рассмотрим другую сумму с теми же числами x_k, но с иным выбором чисел ξ_k. Пусть

$$s' = f(\xi'_0)\,\Delta x_0 + f(\xi'_1)\,\Delta x_1 + f(\xi'_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi'_{n-1})\,\Delta x_{n-1}. \qquad (2)$$

Множители $f(\xi_k)$ и $f(\xi'_k)$ являются факторами в этих суммах.

Рассмотрим их разность:

$$f(\xi_k) - f(\xi'_k). \qquad (3)$$

Так как числа ξ_k и ξ'_k лежат в одном и том же интервале (x_{k+1}, x_k) и так как этот интервал в пределе обращается в нуль, то, следовательно, и разность

$$\xi_k - \xi'_k$$

в пределе равна нулю, а потому и разность (3) имеет пределом нуль.

Следовательно, величины $f(\xi_k)$ и $f(\xi'_k)$, служащие факторами сумм s и s', отличаются друг от друга бесконечно мало, а потому по второму принципу суммы s и s' имеют один и тот же предел, т. е. предел суммы s не зависит от выбора чисел ξ_k.

Мы видим, что эта независимость есть не что иное, как простое приложение второго принципа, согласно которому предел интегральной суммы не изменится, если все факторы ее заменить величинами, отличающимися от них бесконечно мало.

Так как совершенно безразлично, как выбирать числа ξ_k, то мы можем сказать, что слагаемые суммы s есть слагаемые типа $f(x)\,\Delta x$, а потому и пишем основное равенство:

$$\lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

147. Заключение.

Лемма. Если все факторы интегральной суммы бесконечно умаляются, то предел суммы равен нулю.

Второй принцип. При вычислении предела интегральной суммы с конечной областью интеграции факторы можно заменять величинами, бесконечно мало от них отличающимися, а элементы интеграции — эквивалентными величинами.

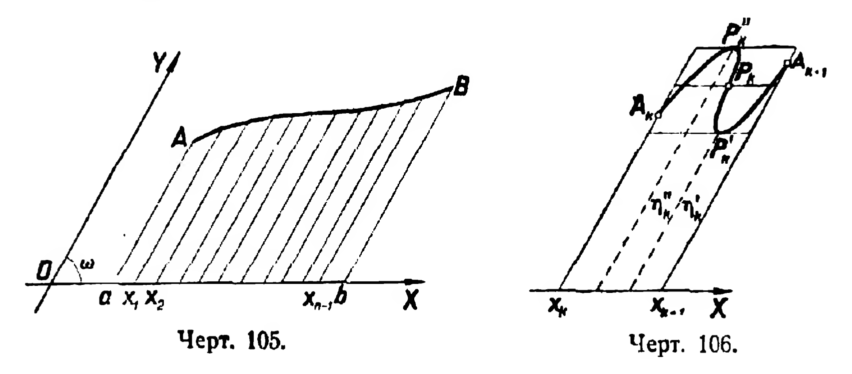
Определенным интегралом называется предел всякой интегральной суммы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

Определенный интеграл имеет разнообразные приложения в области геометрии и механики. Мы здесь рассмотрим некоторые из них; при этом хотя большинство геометрических приложений нами было уже рассмотрено в первой части, мы отчасти снова вернемся к ним, чтобы рассмотреть их с точки зрения эквивалентности, а также чтобы сделать некоторые дополнительные к ним замечания.

§ 148. Площадь в декартовых координатах.

Эту задачу, уже нами изученную достаточно подробно, мы снова рассмотрим в несколько более общем виде, предполагая, что кривая отнесена не к прямоугольным декартовым координатам, а к косоугольным, угол между осями которой равен ω.



Черт. 105. Черт. 106.

Пусть попрежнему a и b — абсциссы двух точек A и B, из которых проводим прямые aA и bB, параллельные оси Y. Криволинейной трапецией, площадь которой обозначим через u, теперь будем называть фигуру $aABb$ (черт. 105). Вставив между a и b ряд промежуточных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, проведем из каждой точки x_k прямую, параллельную оси Y. Этими прямыми трапеция разделится на элементарные полосы, площади которых обозначим через $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Через $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ обозначим ординаты кривой, соответствующие точкам деления.

Предположим — это, как увидим, очень важно,— что кривая всеми точками лежит выше оси X, не имея ни одной точки, общей с осью X. Следовательно, ордината y переменной точки на кривой всегда остается положительной и не может принимать как угодно малых значений.

Рассмотрим элементарную полоску, принадлежащую какому-нибудь подъинтервалу (x_k, x_{k+1}). Пусть P'_k и P''_k -те точки дуги A_kA_{k+1}, ординаты которых η'_k и η''_k соответственно меньше и больше всех остальных ординат интервала (x_k, x_{k+1}). Проводя через них прямые, параллельные оси X, получим внутренний и выступающий элементарные параллелограмы, площади которых обозначим через u'_k и u''_k. Ясно, что

$$u'_k < u_k < u''_k \tag{1}$$

и что

$$u'_k = \eta'_k \sin\omega\,\Delta x_k, \quad u''_k = \eta''_k \sin\omega\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Разность

$$\eta''_k - \eta'_k$$

будет бесконечно малой, если подъинтервалы Δx_k бесконечно малы. Но величины u'_k и u''_k—типа $\beta\alpha$. Их факторы η'_k и η''_k, так как кривая лежит выше оси, не могут принимать как угодно малых значений. В то же время они бесконечно мало отличаются друг от друга. По теореме об эквивалентности заключаем, что

$$u'_k \approx u''_k. \tag{3}$$

Если P_k—произвольно взятая точка на дуге $A_k A_{k+1}$ и ξ_k, η_k -ее координаты, то, проведя через эту точку прямую параллельно оси X, получим элементарный параллелограм общего типа, площадь которого обозначим через v_k. Ясно, что

$$v_k = \eta_k \sin\omega\,\Delta x_k = f(\xi_k)\sin\omega\,\Delta x_k \tag{4}$$

и что одновременно

$$u'_k < u_k < u''_k$$

$$u'_k < v_k < u''_k. \tag{5}$$

Немедленно же, принимая во внимание (3), заключаем, что

$$u_k \approx u'_k, \quad v_k \approx u'_k,$$

а потому

$$u_k \approx v_k.$$

***Теорема.* Площадь элементарной полоски эквивалентна площади элементарного параллелограма общего типа.**

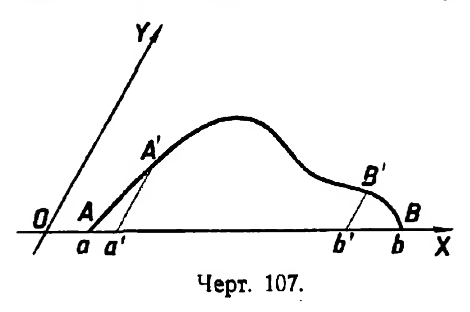
Следовательно, с точки зрения эквивалентности всякая бесконечно тонкая элементарная полоска может рассматриваться как параллелограм.

Предполагая теперь, что число промежуточных точек бесконечно возрастает так, что наибольший промежуток между ними бесконечно умаляется, и опираясь на второй принцип, заключаем, что

$$\text{площ. } aABb = \lim \sum_a^b u_k = \lim \sum_a^b v_k =$$

$$= \lim \sum_a^b f(\xi_k)\sin\omega\,\Delta x_k = \int_a^b \sin\omega\, f(x)\,dx = \sin\omega \int_a^b y\,dx. \tag{6}$$

Но это в предположении, что точки A и B не лежат на оси X. Если бы они лежали на ней, то ордината переменной точки на кривой могла бы принимать как угодно малые значения и тогда из (2) мы не могли бы заключить о (3).



Черт. 107.

Но пусть A и B лежат на оси X. Тогда, взяв точки A' и B' достаточно близко к точкам A и B, по доказанному имеем (черт. 107)

$$\text{площ. } a'A'B'b' = \sin\omega \int_{a'}^{b'} y\,dx.$$

Заставляя a' и b' бесконечно приближаться соответственно к a и b, в пределе опять получим равенство

$$u = \sin\omega \int_a^b y\,dx, \tag{7}$$

где y—функция x.

Если кривая дана параметрически уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то, произведя в (7) подстановку $x = \varphi(t)$, найдем, что

$$u = \sin\omega \int_{t_0}^{T} y\,dx, \tag{8}$$

где y и x уже надо рассматривать как функции t. Пределами интеграла служат значения параметра в начальной и конечной точках кривой. В результате имеем теорему:

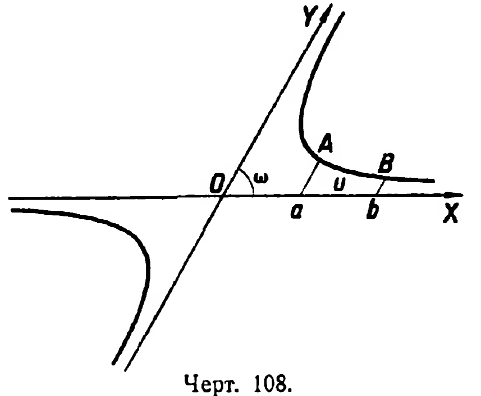
***Теорема.* Площадь кривой трапеции в косоугольной системе координат выражается формулой:**

$$u = \sin\omega \int_{t_0}^{T} y\,dx.$$

Если система координат прямоугольная, то $\sin\omega = 1$, и получаем знакомую формулу.

Пример. Пусть

$$xy = m$$



Черт. 108.

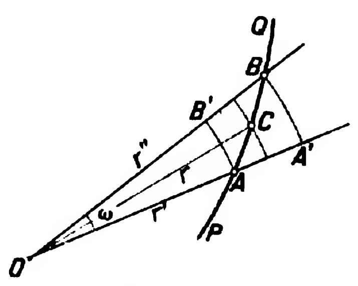
—уравнение гиперболы, отнесенной к своим асимптотам как к осям координат. Если из двух точек ее A и B, абсциссы которых a и b, проведем ординаты aA и bB, то для площади u фигуры $aABb$ имеем:

$$u = \sin\omega \int_a^b y\,dx = \sin\omega \int_a^b \frac{m\,dx}{x} = m \sin\omega \ln \frac{b}{a}.$$

§ 149. Площадь в полярных координатах.

Пусть PQ—кривая. Из точки O проведем в точки A и B два радиус-вектора r' и r'', угол между которыми пусть равен ω. Фигуру AOB назовем кривым сектором. Площадь его обозначим через u. Если ω бесконечно умаляется, то u тоже бесконечно умаляется (черт. 109).

Всякий радиус-вектор r любой точки C, лежащей на кривой между точками A и B, будем называть радиусом нашего сектора.



Черт. 109.

Вычислим, чему эквивалентна площадь u.

Из O как из центра соответственно радиусами r' и r'' описываем дуги AB' и BA'. Получим круговые секторы AOB' и $A'OB$, площади которых обозначим через u' и u''. Имеем

$$u' < u < u'', \tag{1}$$

где

$$u' = \frac{1}{2} r'^2 \omega, \quad u'' = \frac{1}{2} r''^2 \omega. \tag{2}$$

Но геометрически ясно, что если ω бесконечно умаляется, то разности

$$r'^2 - r^2 \quad \text{и} \quad r''^2 - r^2$$

тоже бесконечно умаляются, а потому по теореме об эквивалентности

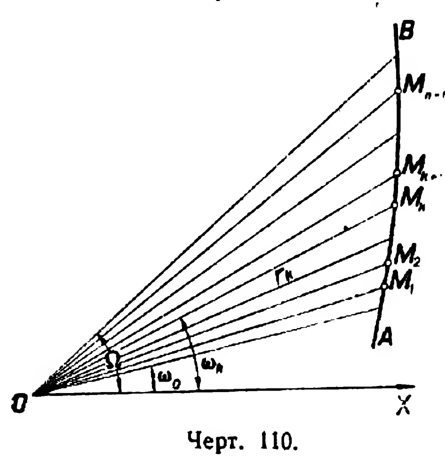
$$u' \approx \frac{1}{2} r^2 \omega, \quad u'' \approx \frac{1}{2} r^2 \omega.$$

Следовательно,

$$u \approx u' \approx u'' \approx \frac{1}{2} r^2 \omega,$$

и мы получаем теорему:

Площадь бесконечно тонкого кривого сектора эквивалентна половине произведения квадрата его радиуса на его угол.



Черт. 110.

Следовательно, с точки зрения эквивалентности площадь кривого сектора можно рассматривать как площадь кругового сектора. Пусть теперь

$$r = f(\omega)$$

—уравнение данной кривой (черт. 110). Мы предположим, что эта кривая пересекается всяким радиус-вектором только в одной точке.

Отметим на кривой две точки A и B с полярными углами ω_0 и Ω. Вставим между A и B ряд промежуточных точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Соединив каждую из них с полюсом радиус-вектором, получим систему кривых секторов. Полярные координаты точки M_k обозначим через r_k, ω_k. Следовательно,

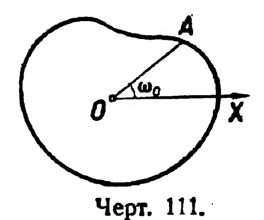
$$r_k = f(\omega_k).$$

Пусть число точек M_k бесконечно возрастает так, что расстояния между ними бесконечно умаляются. Тогда площадь бесконечно тонкого сектора $M_k O M_{k+1}$ эквивалентна

$$\frac{1}{2} r_k^2 \Delta\omega_k,$$

а потому, опять по второму принципу,

$$u = \lim \sum_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\omega_k = \lim \sum_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega_k)^2 \Delta\omega_k = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega)^2 \, d\omega.$$



Черт. 111.

Получаем теорему:

Площадь кривого сектора в полярных координатах выражается формулой:

$$u = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\Omega} r^2 \, d\omega,$$

где ω_0 и Ω — полярные углы крайних радиус-векторов сектора.

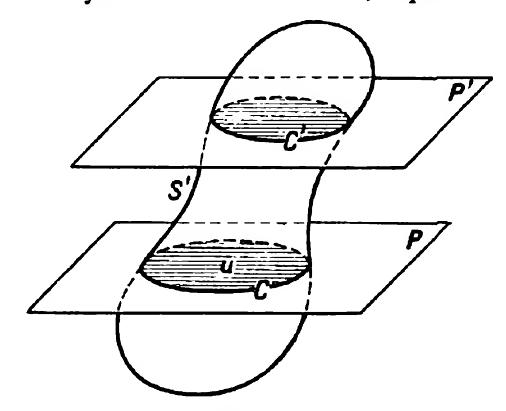
Очевидно, что если данная площадь u ограничена замкнутым около полюса контуром, то надо принять

$$\Omega = \omega_0 + 2\pi,$$

где ω_0 — полярный угол произвольно выбранной точки A на данном контуре (черт. 111).

§ 150. Объем тела произвольной формы.

Пусть имеем тело, ограниченное некоторой замкнутой поверхностью S произвольной формы. Пересечем его двумя плоскостями P и P', параллельными между собой (черт. 112). Ими из данного тела вырежется некоторая часть его, которую назовем слоем. Вообще **слоем будем называть всякое тело, ограниченное некоторой боковой поверхностью и двумя параллельными плоскостями, называемыми основаниями слоя. Расстояние между этими плоскостями назовем высотой слоя.**



Черт. 112.

Обозначим через v объем слоя, через h — его высоту, через S' — ту часть данной поверхности, которая заключена между плоскостями P и P' и которая служит боковой поверхностью слоя. Пусть C и C' — контуры, по которым поверхность S пересекается плоскостями P и P'. Площадь, ограниченную контуром C, обозначим через u

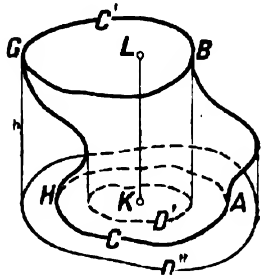
Одновременно с слоем рассмотрим прямой цилиндр, основанием и высотой которого служат основание u слоя и его высота h. Если w — объем этого цилиндра, то

$$w = uh.$$

Докажем, что если h бесконечно мало, то

$$v \approx w.$$

Поверхность S' может быть любой формы. Для ясности представления предположим, что плоскости P и P' горизонтальны (черт. 113) и что AB и HG — те кривые, по которым поверхность S' пересекается плоскостью чертежа, которую считаем вертикальной. Всякой другой вертикальной плоскостью поверхность S' пересечется по кривой более или менее сложной формы *). Спроектируем поверхность S' на плоскость P, т. е. из каждой точки поверхности S' опустим перпендикуляр на плоскость P. Обозначим через σ ту часть плоскости P, которая покроется проекциями всех точек поверхности S', и эту часть назовем тенью, потому что, если вообразить, что поверхность S' освещена сверху вертикальными лучами, то ее тень покроет как раз эту часть σ. Через D' и D'' обозначим внутренний и внешний контуры тени, через u' и u'' — площади, ограниченные этими контурами. Ясно, что



Черт. 113.

$$u' < u < u''. \tag{1}$$

Построим прямой цилиндр с высотой h, основанием которого служит площадь u', и прямой цилиндр с той же высотой, основанием которого служит площадь u''. Если w' и w'' — объемы этих цилиндров, то

$$w' = u'h, \quad w'' = u''h. \tag{2}$$

Геометрически ясно, что

$$w' < w < w'' \tag{3}$$

и что

$$w' < v < w''. \tag{4}$$

Когда h бесконечно умаляется, то в пределе, когда плоскость P' совпадет с P, боковая поверхность S' и ее тень σ исчезнут. Следовательно, если h бесконечно умаляется, то

$$\lim \sigma = 0. \tag{5}$$

Так как

$$u'' = u' + \sigma,$$

то из (2)

$$\frac{w''}{w'} = \frac{u''}{u'} = 1 + \frac{\sigma}{u'},$$

*) В частном случае поверхность S' может быть образована вращением кривой GH около некоторой оси KL.

а потому когда $h \to 0$, то

$$\lim \frac{w''}{w'} = 1.$$

Следовательно,

$$w'' \approx w'.$$

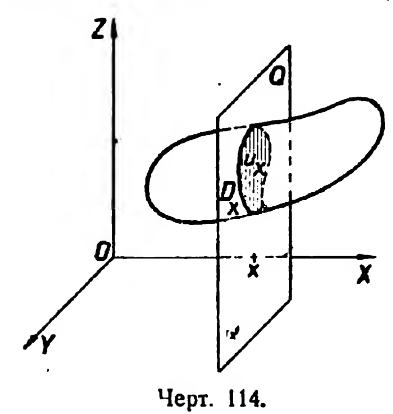
Теперь из (3) и (4) заключаем:

$$w \approx w' \quad \text{и} \quad v \approx w',$$

а потому

$$v \approx w, \quad \text{т. е.} \quad v \approx uh. \tag{6}$$

Если слой, высота которого бесконечно мала, условимся называть бесконечно тонким слоем, то (6) дает теорему:



Черт. 114.

Бесконечно тонкий слой эквивалентен прямому цилиндру, основанием и высотой которого служат основание и высота слоя.

Следовательно, с точки зрения эквивалентности бесконечно тонкий слой можно рассматривать как прямой цилиндр.

Теперь нетрудно вычислить объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью S произвольной формы (черт. 114). Если проведем плоскость Q перпендикулярно к оси абсцисс в точке x, то контур, по которому она пересечет поверхность S, обозначим через D_x. Площадь, ограниченная этим контуром, называется площадью сечения. Ее обозначим через u_x. Очевидно, что u_x—функция x. Пусть

$$u_x = \Phi(x) \tag{7}$$

и пусть a и b—те границы, в которых надо менять x, чтобы плоскость Q пересекала тело.

Делим интервал (a, b) на бесконечно малые подъинтервалы точками x_k и через каждую точку x_k проводим плоскость Q_k, перпендикулярную к оси X. Этими плоскостями тело разобьется на бесконечно тонкие слои. Пусть вообще v_k — слой между плоскостями Q_k и Q_{k+1}; его высота — Δx_k; площадь его основания, т. е. площадь сечения плоскостью Q_k, обозначим через u_k. Так как

$$v_k \approx u_k \Delta x_k \approx \Phi(x_k) \Delta x_k,$$

то объем всего тела

$$v = \sum v_k = \lim \sum_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^b u_x\, dx.$$

Теорема. **Если u_x — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси X, то его объем v, ограниченный плоскостями**

$x = a$ и $y = b$, где $a < b$, определяется по формуле

$$v = \int_a^b u_x\,dx, \qquad (8)$$

где u_x — функция x.

Полезно быстро выводить в уме эту формулу, рассуждая так: слой между плоскостями, перпендикулярными к оси в точках x и $x + dx$, эквивалентен $u_x\,dx$, а потому

$$v = \lim \sum_a^b u_x\,dx = \int_a^b u_x\,dx,$$

т. е. (8).

Вычислим объем v эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Плоскостью через точку x он пересекается по эллипсу

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

полуоси которого равны

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

а потому его площадь

$$u_x = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

и, следовательно,

$$v = \int_{-a}^{+a} u_x\,dx = \int_{-a}^{+a} \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx.$$

Заключаем: **объем эллипсоида равен** $\frac{4}{3}\pi abc$.

При $a = b = c$ получим объем шара.

Если данный объем есть объем тела вращения, то ясно, что

$$u = \pi y^2,$$

и из (8) получаем уже знакомую нам формулу для объема тела вращения.

§ 151. Длина дуги.

Относительно дуги мы доказали (стр. 67), что если кривая дана уравнением

$$y = f(x)$$

и если началом отсчета переменной дуги служит точка с абсциссой a, то

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \qquad (1)$$

откуда

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2. \qquad (2)$$

Предположим теперь, что кривая дана параметрически уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

и пусть за начало отсчета дуг принята точка A, для которой $t=t_0$ (черт. 115). Для такой кривой y вообще не является однозначной функцией x. Но возьмем на кривой точку M с произвольным значением параметра t и отметим около нее настолько малую дугу PQ, чтобы для нее y был однозначной функцией x. Тогда мы можем для этой дуги, рассматривая y как функцию x, применить формулу (2), которую перепишем в такой форме:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \tag{3}$$

Черт. 115.

Так как в ней стоит отношение диференциалов, то формула остается верной при всяком выборе независимого переменного, а потому в ней можем снова рассматривать x и y как функции t. Заключаем:

Если для кривой

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \tag{4}$$

началом отсчета дуг служит точка, для которой $t=t_0$, то

$$ds^2=dx^2+dy^2, \tag{5}$$

а потому

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt, \tag{6}$$

и, следовательно, длина дуги между точками, для которых $t=t_1$ и $t=t_2$, равна

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'(t^2)+\psi'(t)^2}\,dt. \tag{7}$$

Формула (1) является частным случаем формулы (6), когда параметром служит x.

Опираясь на полученный результат, мы можем доказать следующую теорему:

Предел отношения бесконечно умаляющейся дуги без особых точек к ее хорде равен единице.

При этом особой точкой кривой, определенной уравнениями (4), называют всякую точку, для которой

$$\varphi'(t)=\psi'(t)=0.$$

Пусть $M'(x', y'; t')$ и $M''(x'', y''; t'')$ — две точки на кривой (черт. 116). Тогда согласно (7)

$$\text{дуга } M'M''=\int_{t'}^{t''}\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt.$$

Применяя же теорему о среднем значении интеграла, имеем:

$$\text{дуга } M'M'' = (t''-t')\sqrt{\varphi'(\tau)^2+\psi'(\tau)^2},$$

где τ—некоторое число, промежуточное между t' и t''. Вычисляем длину хорды $M'M''$. Применяя теорему Лагранжа, последовательно находим:

$$\text{хорда } M'M'' = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2} =$$
$$= \sqrt{[\varphi(t'')-\varphi(t')]^2+[\psi(t'')-\psi(t')]^2} =$$
$$= (t''-t')\sqrt{\varphi'(\tau')^2+\psi'(\tau'')^2},$$

где τ' и τ'' лежат в интервале (t', t''). Следовательно,

$$\frac{\text{дуга } M'M''}{\text{хорда } M'M''} = \frac{\sqrt{\varphi'(\tau)^2+\psi'(\tau)^2}}{\sqrt{\varphi'(\tau')^2+\psi'(\tau'')^2}}.$$

Черт. 116.

Переходим к пределу, предполагая, что M'' стремится к M'. Так как $\lim\tau = \lim\tau' = \lim\tau'' = t'$, то

$$\lim\frac{\text{дуга}}{\text{хорда}} = \frac{\sqrt{\varphi'(t')^2+\psi'(t')^2}}{\sqrt{\varphi'(t')^2+\psi'(t')^2}}, \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\lim\frac{\text{дуга}}{\text{хорда}} = 1, \tag{9}$$

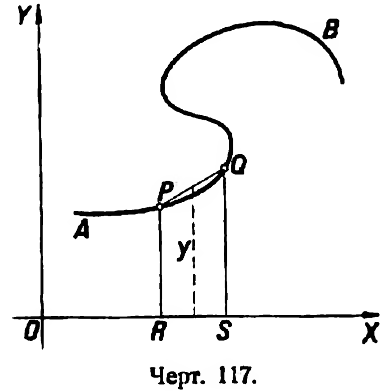
если только случайно в правой части (8) числитель и знаменатель не равны нулю, что возможно только при условии, что

$$\varphi'(t') = \psi'(t') = 0.$$

Теорема доказана.

§ 152. Поверхность тела вращения.

Выше (стр. 65) мы определили поверхность вращения, рассматривая прерывную ломаную, описанную около кривой. Но более естественным будет следующий путь.



Черт. 117.

Пусть кривая AB, уравнения которой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

вращается около оси X; эта кривая может пересекаться прямой, параллельной оси X, не только в одной, но и в нескольких точках.

При своем вращении кривая опишет некоторую поверхность, площадь которой обозначим через S. Вычислим ее. Но предварительно мы должны условиться, что разуметь под площадью поверхности вращения.

Под площадью поверхности вращения будем разуметь предел площади той поверхности, которая получается от вращения ломаной линии, вписанной в данную кривую в предположении, что звенья этой ломаной линии бесконечно умаляются.

Это определение в то же время указывает тот путь, по которому мы должны итти для вычисления площади поверхности вращения.

Вписываем в данную кривую ломаную линию. Пусть PQ — какое-нибудь ее звено. При вращении около оси X это звено опишет боковую поверхность усеченного конуса, которую обозначим через p. По известной формуле из элементарной геометрии имеем:

$$p = \pi(PR + QS)PQ. \tag{1}$$

Пусть y — ордината какой-нибудь точки дуги PQ.

В пределе разность

$$(PR + QS) - 2y = (PR - y) + (QS - y),$$

очевидно, равна нулю. Следовательно, в (1) фактор $PR + QS$ может быть заменен фактором $2y$, а потому

$$p \approx 2\pi y PQ. \tag{2}$$

Пусть s — длина дуги AP. Тогда дуга $PQ = \Delta s$. Так как во (2) хорду PQ можно заменить эквивалентной ей дугой Δs, то

$$p \approx 2\pi y \Delta s. \tag{3}$$

Следовательно, с точки зрения эквивалентности можно рассматривать дугу Δs как прямую, которая при вращении описывает поверхность элементарного конуса, который в свою очередь можно рассматривать как цилиндр, радиус основания которого y, а высота Δs.

Пусть длина всей кривой AB равна l, и будем на время рассматривать y как функцию s. Пусть $y = \Phi(s)$.

Согласно (3), если S — площадь всей поверхности, образованной вращением кривой AB, то

$$S = \lim \sum_0^l 2\pi y \Delta s = \lim \sum_0^l 2\pi\Phi(s)\Delta s = \int_0^l 2\pi\Phi(s)\,ds,$$

т. е.

$$S = \int_0^l 2\pi y\,ds. \tag{4}$$

Но если x и y — функции параметра t, то и s — функция t. Поэтому, если в (4) мы станем рассматривать s как функцию t, то по теореме о подстановке

$$\int_0^l 2\pi y\,ds = \int_{t_0}^T 2\pi y\,ds,$$

где в левой части y — функция s, а в правой y и s — функции t. Теперь (4) дает теорему:

Площадь поверхности вращения кривой определяется по формуле

$$S = \int_{t_0}^T 2\pi y\,ds,$$

где y и s рассматриваются как функции параметра.

Если же кривая дана уравнением $y = f(x)$, то имеем:

$$S = \int_{t_0}^T 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

§ 153. Масса и центр тяжести линии.

Как материальных поверхностей, так и материальных линий в природе не существует. В практической жизни материальной линией мы называем всякое очень тонкое и длинное тело, при суждениях о котором мы принимаем во внимание только его длину. Поэтому с математической точки зрения материальная линия есть геометрическая линия, каждую часть которой мы мыслим связанной с веществом. Это вещество считаем как бы принадлежащим линии, как бы содержащимся в ней.

Если m — количество вещества, заключенного в дуге l данной кривой AB, то отношение

$$\frac{m}{l}$$

называют средней линейной плотностью дуги l. Предел этого отношения в предположении, что дуга l бесконечно умаляется, обращаясь в пределе в точку P, называется истинной линейной плотностью в точке P.

Обозначая эту плотность через ρ, имеем:

$$\lim \frac{m}{l} = \rho. \tag{1}$$

Пусть до перехода к пределу

$$\frac{m}{l} = \rho + \varepsilon, \quad m = l\rho + \varepsilon\rho,$$

где ε бесконечно мало, если l бесконечно мало. Так как из (1) следует, что

$$\lim \frac{m}{\rho l} = 1,$$

то $m \approx \rho l$ и получается

***Теорема*. Количество вещества m, заключенного в бесконечно малой дуге l, эквивалентно произведению этой дуги на плотность вещества в любой точке дуги:**

$$m \approx l\rho.$$

A P l B

Черт. 118.

Пусть AB — данная материальная линия, лежащая в плоскости XY; через s обозначим дугу AP от точки A, принятой за начало отсчета дуг, до переменной точки P (черт. 118). Если через ρ обозначим плотность в точке P, то очевидно, что ρ можно рассматривать как функцию дуги s.

Пусть
$$\rho = \Phi(s).$$

Поставим такую задачу: зная плотность в каждой точке кривой, вычислить массу всей кривой и координаты ее центра тяжести.

Мы знаем, что если мы имеем систему изолированных материальных точек, массы которых

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n,$$

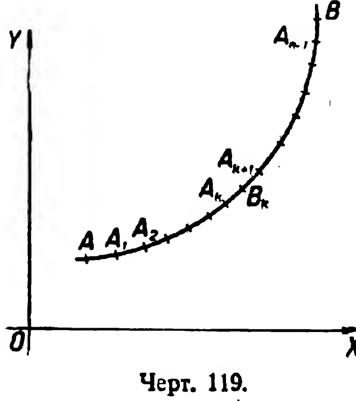
и если

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

— координаты их, то координаты центра тяжести этой системы определяются по формулам:

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_kx_k}{\sum m_k},$$
$$y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_ky_k}{\sum m_k}. \tag{2}$$

Но эти формулы выведены для системы изолированных точек. Нам надо их видоизменить так, чтобы они годились и для масс, распределенных непрерывно.



Черт. 119.

На данной кривой AB (черт. 119) вставим ряд промежуточных точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Считая точку A началом отсчета дуг, будем на время рассматривать координаты точки кривой как функции дуги s.

Пусть

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s).$$

Следовательно, дуга s служит параметром. Если s_k — значение этого параметра для точки A_k, то длина дуги A_kA_{k+1} равна $s_{k+1} - s_k = \Delta s_k$.

Пусть B_k — произвольно взятая точка на дуге A_kA_{k+1}. Через s'_k, ξ_k, η_k обозначим числовые значения дуги s и координат для этой точки B_k. Ясно, что

$$\xi_k = \varphi(s'_k), \quad \eta_k = \psi(s'_k).$$

Если ρ_k — плотность в точке B_k, то

$$\rho_k = \Phi(s'_k).$$

Обозначим через m_k массу бесконечно малой дуги A_kA_{k+1}, через M и l — массу и длину всей линии AB. Мы имеем:

$$M = \sum m_k.$$

Это равенство верно, на какие бы дуги Δs_k мы ни разделили всю линию AB. Предполагая же, что число точек A_k бесконечно возрастает так, что все дуги Δs_k бесконечно умаляются, мы имеем:

$$M = \lim \sum m_k.$$

Но если дуга Δs_k бесконечно мала, то, как мы видели,

$$m_k \approx \rho_k \Delta s_k,$$

а потому

$$M = \lim \sum_0^l \rho_k \Delta s_k = \lim \sum_0^l \Phi(s'_k)\, \Delta s_k.$$

Следовательно,

$$M = \int_0^l \Phi(s)\, ds = \int_0^l \rho\, ds, \tag{3}$$

и мы получили формулу для вычисления массы всей линии через плотность.

Чтобы получить формулы для центра тяжести, мы заменим непрерывную материальную линию AB системой изолированных точек, а именно каждую бесконечно малую дугу Δs_k заменим материальной точкой, масса которой равна массе m_k этой дуги, и поместим эту точку в произвольно взятой точке B_k, лежащей на дуге A_kA_{k+1}.

Если x_c, y_c — координаты центра тяжести этой системы уже изолированных точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то

$$Mx_c = \sum m_k\xi_k, \quad My_c = \sum m_k\eta_k. \tag{4}$$

Но

$$\xi_k = \varphi(s'_k), \quad \eta_k = \psi(s'_k),$$

и

$$m_k \approx \rho_k\Delta s_k \approx \Phi(s'_k)\,\Delta s_k.$$

Те пределы, к которым стремятся x_c, y_c, когда дуги Δs_k бесконечно умаляются, обозначим через ξ, η и примем их за координаты центра тяжести всей линии AB. Из (3) имеем:

$$M\xi = \lim\sum m_k\xi_k = \lim\sum \rho_k\xi_k = \lim\sum \Phi(s'_k)\,\varphi(s'_k)\Delta s_k = \int_0^l \Phi(s)\,\varphi(s)\,ds,$$

и, следовательно, короче

$$M\xi = \int_0^l \rho x\,ds. \tag{5}$$

Очевидно, что аналогично

$$M\eta = \int_0^l \rho y\,ds, \tag{6}$$

где под знаком интеграла x, y и ρ надо рассматривать как функции дуги s.

Предположим теперь, что координаты x, y точки кривой даны как функции параметра t и что при движении по кривой параметр возрастает от t_0 до T. В таком случае s — тоже функция t. Мысленно заменяя s в (3), (5) и (6) этой функцией, получим по теореме о подстановке:

$$M = \int_{t_0}^T \rho\,ds, \quad M\xi = \int_{t_0}^T \rho x\,ds, \quad M\eta = \int_{t_0}^T \rho y\,ds, \tag{7}$$

где x и ρ — уже функции t. Получается

Теорема. **Если t_0 и T — значения параметра для начала и конца материальной линии AB, то ее масса AB и координаты ξ, η центра ее массы определяются по формулам:**

$$M = \int \rho\,ds, \quad M\xi = \int \rho x\,ds, \quad M\eta = \int \rho y\,ds, \tag{8}$$

где плотность ρ и координаты x, y надо рассматривать как функции параметра.

Если $\rho = 1$, то центр тяжести получает название центра тяжести самой геометрической кривой. Следовательно, центром тяжести геометрической кривой называется та точка, которая будет служить центром тяжести для кривой, если ее рассматривать как материальную с однородной плотностью, равной единице. Но если везде $\rho = 1$, то ясно, что масса всей кривой численно равна ее длине: $M = l$, а потому, полагая в (8) $\rho = 1$, заключаем:

Координаты ξ, η центра тяжести геометрической плоской кривой определяются по формулам:

$$l\xi = \int_{t_0}^{T} x\,ds, \quad l\eta = \int_{t_0}^{T} y\,ds, \tag{9}$$

где l — длина кривой.

Если кривая AB (черт. 117) вращается около оси X, то она опишет поверхность вращения, площадь которой

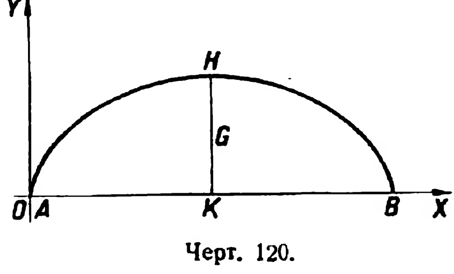
$$S = 2\pi \int_{t_0}^{T} y\,ds. \tag{10}$$

Сравнивая с (9), находим

$$S = 2\pi\eta \cdot l. \tag{11}$$

Но $2\pi\eta$ есть длина окружности, которую описывает при вращении около оси X центр тяжести G кривой, а потому

Теорема Гульдена. **Площадь поверхности, описываемой при вращении кривой около оси, равна длине кривой, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести кривой.**



Черт. 120.

Эта теорема часто дает возможность легко определить центр тяжести некоторых простых линий, зная поверхность, образованную их вращением.

При вычислении положения центра тяжести кривой часто полезно пользоваться тем, что если кривая симметрична относительно некоторой оси, то центр тяжести ее лежит на этой прямой. Вычислим, например, центр тяжести всей циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

а именно ее дуги от $t_0 = 0$ до $t = 2\pi$. Имеем:

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt, \qquad dy = a \sin t\,dt,$$

$$ds = 2a \sin\frac{t}{2}\,dt, \quad l = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\,dt = 8a,$$

$$l\xi = \int_0^{2\pi} x\,ds = \int_0^{2\pi} 2a^2 (t - \sin t) \sin\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2,$$

$$l\eta = \int_0^{2\pi} y\,ds = \int_0^{2\pi} 2a(1 - \cos t) \sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{32a^2}{3},$$

откуда

$$\xi = \pi a, \quad \eta = \frac{4a}{3}.$$

Так как $AB = 2\pi a$, то $\xi = \frac{AB}{2}$. Следовательно, центр тяжести циклоиды лежит на ее оси HK, что очевидно и без вычислений, ввиду симметрии циклоиды относительно своей оси.

§ 154. Заключение.

1. Площадь бесконечно тонкой полоски эквивалентна произведению ее длины на ее высоту.

Площадь бесконечно тонкого кривого сектора эквивалентна половине произведения квадрата его радиуса на его угол.

Длина бесконечно малой дуги эквивалентна ее хорде.

Объем бесконечно тонкого слоя эквивалентен произведению площади его основания на высоту.

2. Имеем формулы:

1) для площади в декартовых и полярных координатах

$$u = \int_{t_0}^{t} y\,dx, \quad u = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{2} r^2 d\omega;$$

2) для длины дуги в декартовых и полярных координатах

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad s = \int_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\omega;$$

3) для объема тела вращения и площади его поверхности

$$v = \int_{t_0}^{T} \pi y^2 dx, \quad S = \int_{t_0}^{T} 2\pi y\, ds;$$

4) для объема тела через сечение

$$v = \int_{a}^{b} u_x\, dx;$$

5) для массы и центра массы линии

$$M = \int \rho\, ds, \quad M\xi = \int \rho x\, ds, \quad M\eta = \int \rho y\, ds.$$

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ.

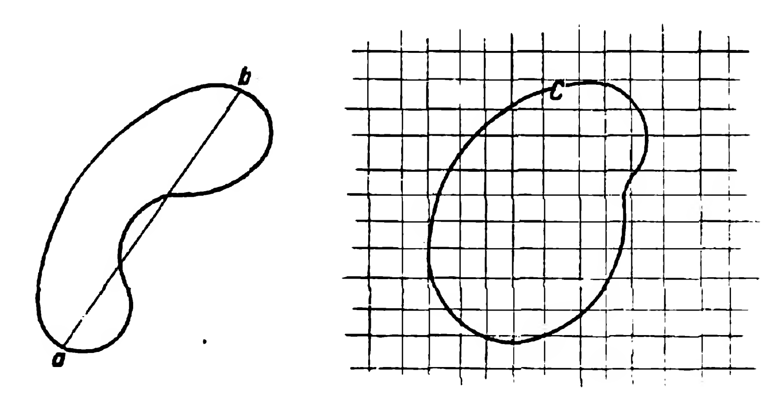
Задача о квадратуре площадей привела нас к понятию определенного интеграла от функции одного переменного. Задача о кубатуре тел приводит к понятию определенного интеграла от функции двух переменных.

§ 155. Элементарные площадки.

Всякую достаточно малую часть плоскости, ограниченную замкнутым контуром, будем называть элементарной площадкой.

Размером, или диаметром, площадки называется длина наибольшей хорды, которую можно провести между двумя любыми точками контура, ограничивающего площадку.

Так, например, размер площадки на чертеже 121 равен длине хорды ab, размер эллипса, очевидно, равен длине его большой оси, размер круга равен его диаметру, размер прямоугольника равен его диагонали.

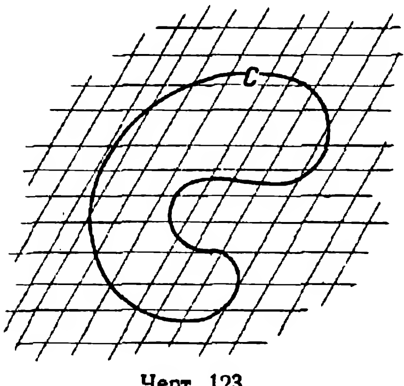


Черт. 121. Черт. 122.

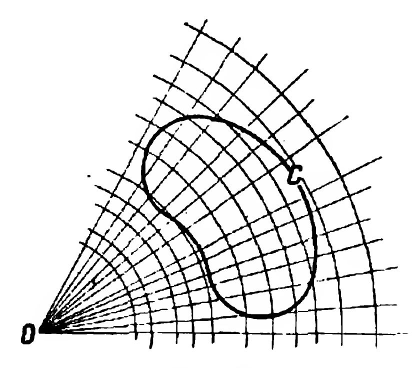
Всякую часть A плоскости, ограниченную замкнутым контуром C (черт. 122), мы можем разделить на элементарные площадки самыми разнообразными способами. Так, например, мы можем разбить площадь A на элементарные площадки, проведя сначала одну систему прямых, параллельных между собой, а затем другую систему прямых, перпендикулярных к прямым первой системы. Этими двумя системами прямых вся плоскость разобьется на прямоугольники. В частном случае, если прямые проведены на одном и том же расстоянии в обеих системах, то мы будем иметь квадраты.

Если прямые второй системы, будучи параллельными между собой, не перпендикулярны к прямым первой системы, то вместо прямоугольников мы будем иметь элементарные параллелограмы (черт. 123).

Часто мы будем пользоваться также следующим способом деления площади. Из точки O как полюса проводим систему концентрических



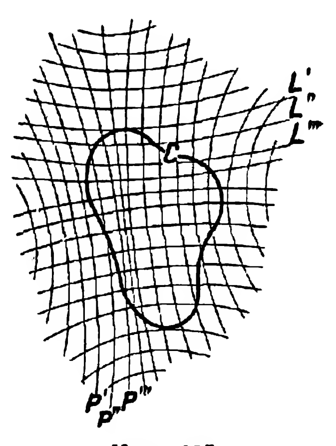
Черт. 123.



Черт. 124.

окружностей, которыми плоскость разобьется на кольца. Проведя затем из O систему лучей (черт. 124), мы разобьем плоскость на кривые четырехугольники.

Все рассмотренные способы дробления являются частными случаями следующего общего способа. Мы проводим (черт. 125) сначала систему кривых L', L'', L''', ... совершенно произвольной формы, но только не пересекающихся между собой, а затем другую систему каких-нибудь кривых P', P'', P''', ..., тоже не пересекающихся между собой, но пересекающих все кривые первой системы. Этими двумя системами площадь разобьется на элементарные кривые четырехугольники общего типа.



Черт. 125.

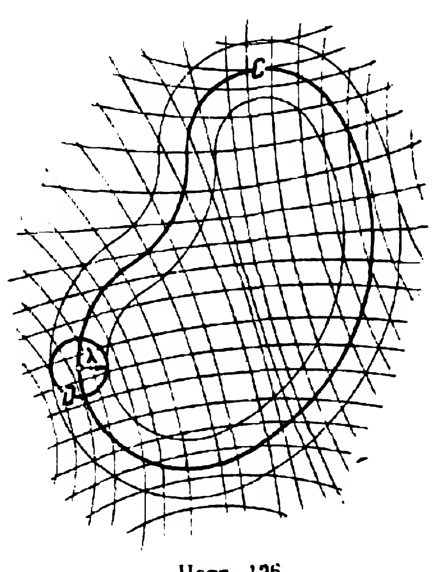
При любом способе дробления все элементарные площадки по отношению к данной фигуре A разделятся на три класса: на внутренние, внешние и граничные. Сумму всех граничных площадок обозначим через g. При этом *граничной площадкой мы будем называть всякую площадку, которая имеет хотя бы только одну точку, общую с контуром.*

Обозначим через λ наибольший из всех размеров элементарных площадок и вообразим следующий процесс: разделив всю плоскость по какому-нибудь закону на элементарные площадки и вычислив сумму всех граничных площадок, мы после этого снова делим всю плоскость по какому-нибудь закону на элементарные площадки и вычисляем сумму граничных площадок для этого нового деления и так продолжаем неограниченно, переходя последовательно от одного деления плоскости к следующему за ним

делению и вычисляя для каждого деления сумму всех граничных площадок. Легко убедиться, что справедлива

Лемма. **Если переход от одного деления плоскости на элементарные площадки к следующему делению совершается по такому закону, что наибольший размер площадок бесконечно умаляется, то в таком случае сумма всех граничных площадок тоже бесконечно умаляется.**

Действительно, пусть при каком-нибудь делении наибольший размер всех элементарных площадок меньше или равен λ. Вообразим кружок D радиуса λ с центром в какой-нибудь точке контура C и мысленно заставим центр этого кружка описать весь контур C. Тогда очевидно, что все точки кружка опишут на плоскости некоторую полосу L*). Геометрически очевидно, что если λ бесконечно умаляется, то площадь полосы L тоже бесконечно умаляется. Но ясно также, что всякая граничная площадка лежит внутри полоски L. В самом деле, если K — точка, общая какой-нибудь граничной площадке и контуру, то, когда центр кружка попадет в эту точку, площадка будет внутри кружка, потому что размер ее меньше радиуса кружка. Следовательно, сумма всех граничных площадок меньше площади бесконечно умаляющейся полосы L, а потому $\lim g = 0$.



Черт. 126.

Лемма доказана. Ее можно обобщить следующим образом: обозначим через g' ту сумму, которую получим, если будем брать от каждой граничной площадки только некоторую, все равно какую, часть ее. Очевидно, что $g' < g$, а потому **не только сумма всех граничных площадок, но также и сумма любых произвольно взятых частей этих площадок в пределе равна нулю.**

Пусть теперь s — сумма всех внутренних элементарных площадок. Через S обозначим сумму как всех внутренних, так и всех граничных площадок. Следовательно,

$$S = s + g.$$

Пусть, наконец, A — площадь фигуры, ограниченной контуром C. Геометрически очевидны неравенства:

$$A - s < g, \quad S - A < g,$$

и так как g в пределе равно нулю, то

$$\lim s = A, \quad \lim S = A,$$

а отсюда следует

*) Если представить себе, что кружок сделан из картона и что сторона его, приложенная к чертежу, покрыта чернилами, то след чернил даст как раз полосу L.

Теорема. **Всякую площадь, ограниченную замкнутым контуром, можно рассматривать как предел суммы внутренних элементарных площадок, а также как предел суммы всех внутренних и граничных элементарных площадок.**

Переход от одного деления плоскости на элементарные площадки к следующему делению по такому закону, чтобы размеры площадок бесконечно умалялись, для теории двойных интегралов является основным. Как сам переход, так и формы площадок могут мыслиться подчиненными самым разнообразным законам. Наиболее простой переход от одного деления к следующему заключается в том, что мы к имеющимся уже линиям прибавляем новые, увеличивая число их так, чтобы наибольший из диаметров площадок бесконечно умалялся.

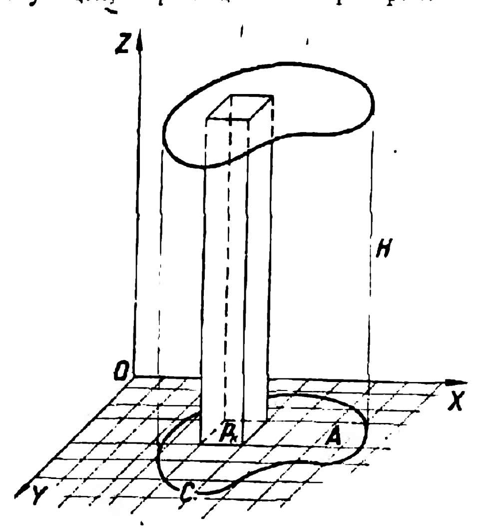
Элементарные площадки всегда появляются как вспомогательные величины, назначение которых в окончательных формулах бесконечно умаляться. Поэтому вместо того, чтобы говорить, что если площадки бесконечно умаляются, то сумма граничных площадок тоже бесконечно умаляется, обыкновенно говорят:

сумма бесконечно малых граничных площадок бесконечно мала.

Здесь, как и всегда, прилагательное „бесконечно малая" указывает не столько на малость площадок, сколько на роль их в доказательствах.

§ 156. Объемы цилиндра и конуса.

Как известно, цилиндрическая поверхность получается так: воображаем, что прямая, называемая образующей, перемещаясь в пространстве параллельно самой себе, в то же время постоянно проходит через какую-нибудь точку данной кривой. След этой прямой в пространстве и дает цилиндрическую поверхность.



Черт. 127.

Следовательно,

цилиндрическая поверхность есть геометрическое место параллельных между собой прямых, проходящих через все точки данной кривой.

Если данная кривая принадлежит к классу замкнутых кривых, то мы будем иметь замкнутую цилиндрическую поверхность.

Пусть имеем некоторую замкнутую цилиндрическую поверхность (черт. 127). Пересечем ее двумя плоскостями, параллельными между собой и перпендикулярными к образующей. Мы получим тело, ограниченное с боков цилиндрической поверхностью и, кроме того, двумя плоскостями. Это будет прямой цилиндр. Части плоскостей, ограничивающих прямой цилиндр, называются его основаниями. Очевидно, что эти плоскости пересекают цилиндрическую поверхность по двум совершенно тожественным кривым. Длина образующей между основаниями называется высотой цилиндра.

Пусть C — контур, ограничивающий нижнее основание цилиндра. Обозначим через A площадь основания, через H — высоту цилиндра, через v — его объем. Разделим площадь основания на элементарные площадки, проведя две системы прямых так, чтобы прямые каждой системы были параллельны между собой и перпендикулярны к прямым другой системы. Этими двумя системами прямых вся плоскость основания разделится на элементарные прямоугольники. Часть из них будет лежать внутри контура C. Их площади обозначим через $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Другая часть даст нам граничные прямоугольники. Площади их обозначим через $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Пусть, наконец, как и раньше, s — сумма площадей всех внутренних прямоугольников, а S — сумма всех внутренних и всех граничных прямоугольников. Если мы вообразим, что число элементарных прямоугольников бесконечно возрастает так, что размеры их в то же время бесконечно умаляются, то, как мы видели,

$$\lim s = \lim S = A. \tag{1}$$

Возьмем какую-нибудь элементарную площадку p_k и построим на ней призму, верхнее основание которой совпадает с верхним основанием цилиндра. Будем называть эту призму элементарной призмой. Объем ее, очевидно, равен $p_k H$.

Воображаем, что подобные элементарные призмы построены на всякой элементарной площадке, как на внутренней, так и на граничной. Сумма объемов всех внутренних элементарных призм, очевидно, равна:

$$p_1H + p_2H + p_3H + \ldots = Hs,$$

и ясно, что эта сумма меньше объема цилиндра.

Сумма же объемов всех внутренних элементарных призм и всех граничных равна:

$$p_1H + p_2H + p_3H + \ldots + q_1H + q_2H + q_3H + \ldots = HS,$$

и очевидно, что эта сумма больше объема цилиндра. Таким образом мы имеем неравенства:

$$Hs < v < HS.$$

Пусть число элементарных площадок бесконечно возрастает так, что размеры их бесконечно умаляются. Из (1) имеем:

$$H \lim s \leqq v \leqq H \lim S,$$

т. е.

$$HA \leqq v \leqq HA,$$

а потому

$$v = AH.$$

***Теорема.* Объем цилиндра, образующие которого перпендикулярны к основанию его, равен произведению площади основания на высоту.**

Подобным же образом можно вычислить и объем конуса, высота которого пусть будет тоже H, площадь основания — A, объем — v.

***Теорема.* Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

Чтобы доказать это, оставляем прежнее деление на элементарные площадки и прежние обозначения. На каждой из элементарных площадок, на

которые разбито основание конуса, строим пирамиду с вершиной в K. Сумма объемов всех внутренних пирамид равна

$$\frac{1}{3}\left\{Hp_1+Hp_2+Hp_3+\ldots\right\}=\frac{1}{3}Hs,$$

а сумма объемов всех внутренних и граничных пирамид равна

$$\frac{1}{3}\left\{Hp_1+Hp_2+Hp_3+\ldots+Hq_1+Hq_2+Hq_3+\ldots\right\}=\frac{1}{3}HS,$$

и так как очевидно, что

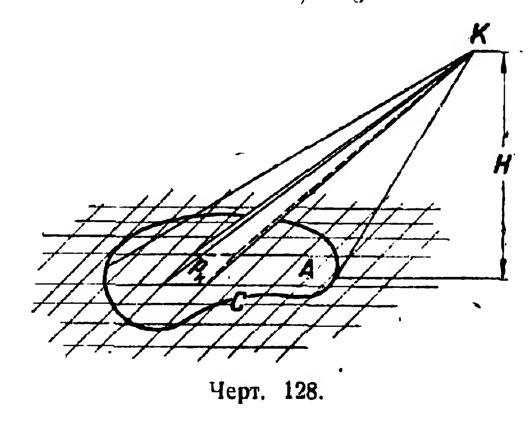
$$\frac{1}{3}Hs<v<\frac{1}{3}HS,$$

то переход к пределу дает

$$\frac{1}{3}HA\leqq v\leqq\frac{1}{3}HA,$$

откуда следует, что

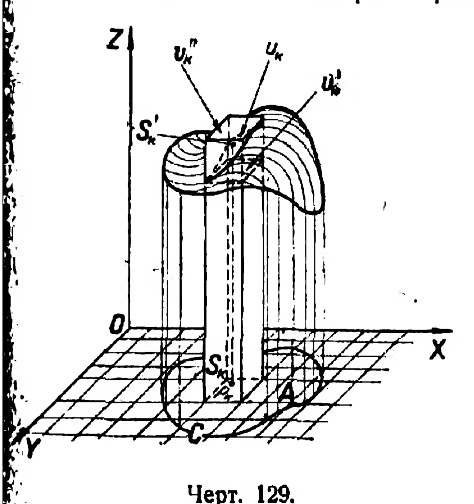
$$v=\frac{1}{3}HA.$$



Черт. 128.

§ 157. Цилиндроид.

Предположим, что в пространстве установлена прямоугольная система декартовых осей координат, и пусть дана некоторая поверхность S, относительно которой предположим, что она всеми точками расположена над плоскостью XY и что каждой прямой, параллельной оси Z, она пересекается только в одной точке. Тогда уравнение этой поверхности может быть представлено в форме:



Черт. 129.

$$z=f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция двух переменных (черт. 129).

На плоскости XY проводим некоторый замкнутый контур C, на котором строим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Z. Эта поверхность пересечет данную поверхность S по некоторой замкнутой кривой, которую обозначим через C'. Пусть S' — та часть поверхности S, которая ограничена контуром C'.

Мы теперь имеем тело, которое с боков ограничено цилиндрической поверхностью, снизу плоскостью XY, сверху же частью S' данной поверхности S. Тела подобной формы мы будем называть цилиндроидами. В частном случае некоторые образующие и даже все могут быть равны

20*

нулю. Так, например, полушар мы можем рассматривать как цилиндроид без боковой поверхности.

Чтобы вычислить объем цилиндроида, поступим следующим образом: обозначая через A площадь, ограниченную на плоскости XY контуром C, делим ее на элементарные площадки p_1, p_2, $p_3, \ldots$ произвольной формы. Возьмем из них какую-нибудь площадку p_k. На контуре ее построим цилиндрическую поверхность. То тело, которое с боков ограничено этой поверхностью, снизу — площадкой p_k, сверху же — частью поверхности S, мы назовем элементарным цилиндроидом и объем его обозначим через u_k. Воображаем, что на каждой элементарной площадке построен соответствующий ей элементарный цилиндроид. Очевидно, что если V — объем данного цилиндроида, то

$$V = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

или короче,

$$V = \sum u_k.$$

Если бы мы могли вычислить объем каждого элементарного цилиндроида, то мы могли бы вычислить и объем данного цилиндроида. Но при вычислении объема элементарного цилиндроида мы встречаемся с теми же трудностями, как и при вычислении объема данного цилиндроида. Легко, однако, видеть, что вместо объема элементарного цилиндроида мы можем взять объем так называемого элементарного цилиндра, который мы получим следующим образом.

Внутри площадки p_k возьмем произвольно точку s_k с координатами ξ_k и η_k. Восставим в ней перпендикуляр, который пусть пересечет поверхность в точке s'_k. Аппликату *) этой точки обозначим через z_k. Если мы теперь через точку s'_k проведем плоскость, параллельную плоскости XY, то мы получим цилиндр, который снизу ограничен площадкой p_k, сверху — плоскостью, проведенной через точку s'_k, с боков же — цилиндрической поверхностью, построенной на контуре, ограничивающем площадку p_k. Объем этого цилиндра мы обозначим через v_k и будем его называть э л е м е н т а р н ы м ц и л и н д р о м о б щ е г о т и п а. Высотой его служит аппликата какой-нибудь точки s'_k той части поверхности S, которая лежит над площадкой p_k. Если мы будем брать различные точки s'_k, то будем получать различные элементарные цилиндры.

Но среди различных точек s'_k, л е ж а щ и х н а п о в е р х н о с т и н а д п л о щ а д к о й p_k, есть точка, аппликата которой меньше всех остальных, и есть точка, аппликата которой больше всех остальных. Обозначим через z'_k наименьшую, через z''_k — наибольшую из этих аппликат и построим два элементарных цилиндра, общим основанием которых служит площадка p_k, а высотами — соответственно аппликаты z'_k и z''_k. Объемы этих цилиндров обозначим через v'_k и v''_k; первый цилиндр будем называть в н у т р е н н и м элементарным цилиндром, а второй — в ы с т у п а ю щ и м. Тот и другой, очевидно, есть частный случай элементарного цилиндра общего типа. Геометрически очевидны неравенства:

$$v'_k < v_k < v''_k, \quad v'_k < u_k < v''_k. \tag{1}$$

*) Если x, y, z — координаты точки M, то x — абсцисса, y — ордината, z — аппликата.

Докажем, что если число элементарных площадок бесконечно возрастает так, что размеры их бесконечно умаляются, то v'_k, v''_k, v_k, u_k эквивалентны между собой. В самом деле,

$$v'_k = p_k z'_k, \quad v''_k = p_k z''_k.$$

Имеем:

$$\frac{v''_k}{v'_k} = \frac{z''_k}{z'_k} = \frac{z'_k + (z''_k - z'_k)}{z'_k} = 1 + \frac{z''_k - z'_k}{z'_k}.$$

Так как ясно, что разность $z''_k - z'_k$ в пределе равна нулю, то

$$\lim \frac{v''_k}{v'_k} = 1,$$

а потому

$$v''_k \approx v_k.$$

Из (1) следует, что

$$u_k \approx v'_k, \quad v_k \approx v'_k,$$

и так как две величины, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой, то u_k эквивалентно v_k.

Итак, мы доказали следующее:

Объем элементарного цилиндроида эквивалентен объему элементарного цилиндра.

Но если V — объем данного цилиндроида, то равенство

$$V = \sum u_k \tag{2}$$

существует при всяком делении площади A на элементарные площадки, а потому если число элементарных площадок бесконечно возрастает так, что размеры их бесконечно умаляются, то равенство (2) будет иметь место и в пределе:

$$V = \lim \sum u_k.$$

Но теперь в правой части, согласно второму принципу, всякое слагаемое u_k можем заменить эквивалентной ему величиной v_k, а потому

$$V = \lim \sum v_k,$$

и мы имеем теорему:

Объем цилиндроида равен пределу суммы объемов элементарных цилиндров.

Посмотрим теперь, как эта теорема выразится в аналитической форме.

Объем элементарного цилиндра, построенного на площадке p_k, равен $p_k z_k$, где z_k — апликата точки s'_k. Если абсциссу и ординату этой точки обозначим через ξ_k и η_k, то

$$z_k = f(\xi_k, \eta_k),$$

где ξ_k и η_k мы можем рассматривать как абсциссу и ординату точки s_k, взятой нами произвольно на площадке p_k.

Таким образом, объем элементарного цилиндра, построенного на площадке p_k, равен произведению $f(\xi_k, \eta_k)p_k$, а потому, если через σ мы обозначим сумму всех элементарных объемов, то

$$\sigma = \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k,$$

и мы можем высказать следующее положение:

Чтобы вычислить объем цилиндроида, ограниченного сверху поверхностью S, уравнение которой

$$z = f(x, y),$$

надо разделить основание цилиндроида на элементарные площадки и взять сумму всех тех произведений, которые получим, умножая площадь p_k каждой площадки на значение функции $f(\xi_k, \eta_k)$ в какой-нибудь точке s_k, лежащей на этой площадке. Предел полученной таким образом суммы

$$\sigma = \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k$$

равен объему цилиндроида.

Итак, для вычисления объемов надо уметь находить пределы сумм типа σ; пределы подобных сумм и называются двойными интегралами. Самую сумму σ назовем интегральной суммой.

§ 158. Двойной интеграл.

Понятие о двойном интеграле мы вводим с помощью следующего определения:

Предполагаем, что на плоскости выбрана прямоугольная система декартовых осей координат, и пусть $f(x, y)$ — некоторая данная функция двух переменных, непрерывная во всех точках некоторой площади A, ограниченной одним или несколькими контурами (на чертеже 130 тремя: внешним C и внутренними C_1 и C_2).

Площадь A разбиваем на элементарные площадки $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Внутри каждой площадки p_k берем произвольно какую-нибудь точку с координатами ξ_k и η_k, и значение данной функции в этой точке помножаем на величину площадки p_k. Получаем произведение

$$f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Составляем подобные произведения для каждой элементарной площадки и берем сумму их всех. Пусть

$$\sigma = \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Предел суммы σ в предположении, что число элементарных площадок бесконечно возрастает так, что размеры их бесконечно умаляются, называется двойным интегралом, распространенным на площадь A, или взятым по площади A, и обозначается так:

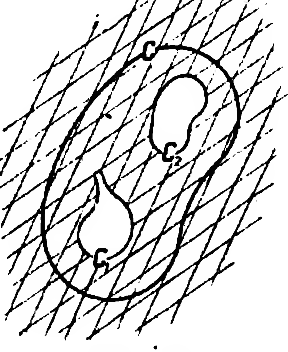
$$\iint_A f(x, y)\, de,$$

Следовательно, по определению

$$\iint\limits_A f(x,\ y)\,de = \lim \sum f(\xi_k,\ \eta_k)\,p_k.$$

Как мы видим, сначала пишут два знака интеграла *), затем пишут произведение данной функции $f(x,\ y)$ на символ de. Этот символ должен обозначать площадь произвольно взятой элементарной площадки. Вместо него можно написать и всякий иной символ, приписав ему тот же смысл. Можно, например, написать и так:

$$\iint\limits_A f(x,\ y)\cdot q.$$



Черт. 130.

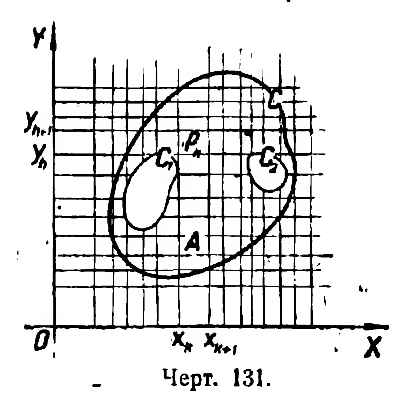
Внизу знаков двух интегралов иногда приписывают символ, который должен указывать, по какой площади берется двойной интеграл. Но часто этого символа не пишут.

Самое же общепринятое обозначение двойного интеграла такое:

$$\iint\limits_A f(x,\ y)\,dxdy,$$

где вместо символа de стоит произведение двух диференциалов. Такое обозначение принято благодаря следующим соображениям:

Для построения суммы σ мы можем делить данную площадь A на элементарные площадки какой угодно формы. Очевидно, что одно из простейших делений будет то деление, которое мы получим, если проведем две системы прямых, соответственно параллельных осям координат. Тогда каждая элементарная площадка будет иметь форму прямоугольника.



Черт. 131.

Пусть прямые, перпендикулярные к оси X, пересекают ее в точках (черт. 131):

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n.$$

Прямые же, перпендикулярные к оси Y, пусть пересекают ее в точках

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_h,\ \ldots,\ y_{m-1},\ y_m.$$

Как всегда, полагаем

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,\quad \Delta y_h = y_{h+1} - y_h.$$

Ту часть плоскости, которая заключена между прямыми, перпендикулярными к оси X в точках x_k и x_{k+1}, условимся называть вертикальной полоской $(x_k,\ x_{k+1})$. Часть же плоскости, заключенную между прямыми, перпендикулярными к оси Y в точках y_h и y_{h+1}, будем называть горизонтальной полоской $(y_h,\ y_{h+1})$. Обозначим через $p_{k,h}$ площадь того элементарного прямоугольника, который лежит на пересечении вертикальной полоски $(x_k,\ x_{k+1})$ и горизонтальной $(y_h,\ y_{h+1})$.

*) Почему два, выяснится ниже.

Внутри него выберем точку, координаты которой пусть будут ξ_{kh} и η_{kh}. При таких обозначениях сумма σ примет следующий вид:

$$\sigma = \sum f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh},$$

причем в правой части мы берем площадь всего элементарного прямоугольника, если он внутренний, и только часть его, если он граничный.

Докажем теперь, что при составлении суммы σ мы по желанию можем брать или отбрасывать те слагаемые, которые относятся к граничным прямоугольникам.

Для этого все слагаемые суммы σ разделим на две группы:

$$\sigma = \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh} + \sum_{\text{гран.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh}. \quad (1)$$

В первую группу мы собираем слагаемые, относящиеся к внутренним элементарным прямоугольникам, во вторую же — слагаемые, относящиеся к граничным прямоугольникам. Пусть σ' — эта последняя сумма:

$$\sigma' = \sum_{\text{гран.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh}, \quad (2)$$

причем не надо забывать, что в каждом слагаемом этой суммы под символом p_{kh} надо разуметь только ту часть площади граничного прямоугольника, которая в то же время принадлежит и данной площади A.

Легко было бы доказать, что в пределе сумма σ' равна нулю. Но мы докажем более общую лемму. Пусть

$$\sigma'' = \sum_{\text{гран.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) q_{kh}, \quad (3)$$

где слагаемые суммы составлены следующим образом: от всякого граничного прямоугольника p_{kh} мы берем совершенно произвольно некоторую часть его, площадь которой обозначим через q_{kh}. Эту величину q_{kh} мы умножим на значение функции в какой-нибудь точке граничного прямоугольника p_{kh}, конечно, в такой точке, которая в то же время принадлежит и данной площади A. Получим произведение $f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) q_{kh}$. Сумма всех таких произведений, составленных для каждого граничного прямоугольника, и есть сумма σ''.

Пусть теперь M — наибольшее значение абсолютной величины данной функции на всей площади A. Следовательно, всегда

$$|f(\xi_{kh}, \eta_{kh})| \leqq M. \quad (4)$$

Так как абсолютная величина суммы равна или меньше суммы абсолютных величин слагаемых, то из (3) имеем:

$$|\sigma''| \leqq \sum |f(\xi_{kh}, \eta_{kh})| q_{kh}.$$

Принимая во внимание неравенство (4), получаем неравенство:

$$|\sigma''| \leqq M \sum q_{kh}, \quad (5)$$

или

$$|\sigma''| \leqq Mg', \quad (6)$$

где g' — сумма площадей некоторых частей граничных прямоугольников. Мы знаем, что сумма площадей всех граничных прямоугольников в пределе равна нулю, а потому

$$\lim \sigma'' = 0.$$

Очевидно, что сумма σ' есть частный случай суммы σ''. Следовательно,

$$\lim \sigma' = 0. \tag{7}$$

Возвратимся теперь к равенству (1), которое перепишем в такой форме:

$$\sigma = \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh} + \sigma'.$$

Благодаря (7), мы видим, что

$$\iint\limits_A f(x, y)\, de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh}. \tag{8}$$

Следовательно, при вычислении предела суммы σ мы можем не принимать во внимание граничных элементарных прямоугольников.

Но так как предел суммы σ'' тоже равен нулю, то ясно, что вместо равенства (8) мы можем написать также равенство:

$$\iint\limits_A f(x, y)\, de = \lim \left\{ \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh} + \sum_{\text{гран.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) q_{kh} \right\}.$$

Получается

Теорема. **При вычислении двойного интеграла как предела суммы мы можем при составлении суммы или совсем пренебрегать граничными элементарными прямоугольниками, или можем вместо каждого брать произвольную часть его.**

Заметив это, при составлении суммы σ примем во внимание только внутренние прямоугольники. Имеем:

$$\iint\limits_A f(x, y)\, de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh}.$$

Но геометрически ясно, что площадь прямоугольника p_{kh} определится по следующей формуле:

$$p_{kh} = (x_{k+1} - x_k)(y_{h+1} - y_h) = \Delta x_k \Delta y_h,$$

а потому

$$\iint\limits_A f(x, y)\, de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) \Delta x_k \Delta y_h. \tag{9}$$

До сих пор мы предполагали, что система прямых линий проведена как угодно, под единственным условием, что прямые каждой системы параллельны соответствующей оси координат. Теперь мы предположим, что все прямые каждой системы находятся на равных расстояниях друг от друга. В таком случае все разности

$$\Delta x_0,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_{n-1}$$

равны между собой, и общую величину их мы можем обозначить одним и тем же символом Δx.

Точно так же мы обозначим одним и тем же символом Δy общую величину теперь равных между собой разностей

$$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \ldots,\ \Delta y_{m-1}.$$

Теперь равенство (9) перепишется в такой форме:

$$\iint_A f(x, y)\, de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh})\, \Delta x\, \Delta y.$$

Если же мы вместо символов Δx, Δy как символов произвольных приращений напишем символы dx, dy, то получим:

$$\iint_A f(x, y)\, de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh})\, dx\, dy.$$

Короче же это равенство можно переписать в такой форме:

$$\iint_A f(x, y)\, de = \lim \sum f(x, y)\, dx\, dy,$$

что надо читать так: двойной интеграл есть предел суммы, слагаемые которой типа $f(x, y)\, dx\, dy$. Поэтому-то двойной интеграл и обозначают обыкновенно так:

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy.$$

§ 159. Основные свойства двойных интегралов.

Рассмотрим основные свойства двойных интегралов. Эти свойства вполне аналогичны свойствам обыкновенных интегралов. Приступая к доказательству их, мы предварительно условимся в следующих обозначениях.

Мы предположим, что нам дана некоторая площадь A, ограниченная одним или несколькими контурами C, C_1, C_2, ... Воображаем, что данная площадь разделена на элементарные площадки p_1, p_2, ... p_k, ... Внутри каждой площадки p_k выбираем произвольно точку, координаты которой пусть будут ξ_k, η_k. Тогда по определению

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k. \tag{1}$$

Основные свойства двойного интеграла выражаются в следующих теоремах.

1. ***Теорема.* Если A — площадь той части плоскости, по которой берется двойной интеграл, то**

$$\iint_A dx\, dy = A. \tag{2}$$

В самом деле, положим, что в равенстве (1) функция $f(x, y)$ тождественно равна единице. Имеем

$$\iint_A dx\, dy = \lim \sum p_k. \tag{3}$$

Но на какие бы элементарные площадки ни была разделена площадь A, всегда

$$\lim \sum p_k = A,$$

а потому (2).

2. ***Теорема о среднем значении интеграла.*** **Внутри площади интеграции всегда есть некоторая такая точка с координатами ξ, η, что**

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\,dxdy = f(\xi, \eta)\cdot A. \qquad (4)$$

Обозначим через m и M наибольшее и наименьшее из всех тех значений, которые данная функция $f(x, y)$ может принимать на площади A. Следовательно, при всяком k

$$mp_k \leqq f(\xi_k, \eta_k)\,p_k \leqq Mp_k,$$

а потому

$$m\sum p_k \leqq \sum f(\xi_k, \eta_k)\,p_k \leqq M\sum p_k.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$mA \leqq \iint\limits_{A} f(x, y)\,dxdy \leqq MA.$$

Следовательно, мы можем написать равенство:

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\,dx\,dy = qA, \qquad (5)$$

где q — неизвестная нам величина, промежуточная между m и M. Но непрерывная функция принимает все значения, промежуточные между ее наименьшим и наибольшим значениями. Следовательно, должны быть такие ξ и η, что

$$q = f(\xi, \eta).$$

Вставляя это выражение для q в равенство (5), получаем теорему. Ей в теории обыкновенных интегралов соответствует теорема о среднем значении интеграла:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

3. ***Теорема.*** **Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.**

$$\iint\limits_{A} Cf(x, y)\,dxdy = C\iint\limits_{A} f(x, y)\,dxdy. \qquad (6)$$

Чтобы умножить сумму на какую-нибудь величину, надо помножить на эту величину каждое слагаемое. Поэтому, если C—постоянная величина, то

$$\sum Cf(\xi_k, \eta_k)\,p_k = C\sum f(\xi_k, \eta_k)\,p_k.$$

Переходя к пределу, получим равенство (6).

4. ***Теорема.*** **Интеграл суммы равен сумме интегралов:**

$$\iint\limits_{A} [\varphi(x, y) \pm \psi(x, y)]\,dxdy = \iint\limits_{A} \varphi(x, y)\,dxdy \pm \iint\limits_{A} \psi(x, y)\,dxdy.$$

В самом деле, всегда справедливо равенство:

$$\sum [\varphi(\xi_k, \eta_k) \pm \psi(\xi_k, \eta_k)]\, p_k = \sum \varphi(\xi_k, \eta_k)\, p_k \pm \sum \psi(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

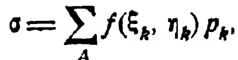
Переходя к пределу, получим теорему.

5. *Теорема.* Интеграл, взятый по всей площади, равен сумме интегралов по всем частям, на которые разбита данная площадь:

$$\iint\limits_{P+Q+R} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{P} f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{Q} f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{R} f(x, y)\, dxdy. \quad (7)$$

Вообразим, что данная площадь A разделена на некоторое число частей, например на три части: P, Q и R.

Делим всю площадь A на элементарные площадки и составляем сумму



$$\sigma = \sum_A f(\xi_k, \eta_k)\, p_k,$$

Черт. 132.

где индекс A показывает, что надо взять слагаемые, относящиеся ко всем элементарным площадкам. Мы теперь разделим слагаемые суммы σ на три группы. В одну группу отнесем те слагаемые, в которые входят все элементарные площадки, принадлежащие части плоскости P. Другую группу дадут слагаемые, соответствующие площадкам части плоскости Q. Наконец, слагаемые, составленные с помощью площадок части плоскости R, нам дадут третью группу. Полученные суммы мы можем обозначить так:

$$\sum_P f(\xi_k, \eta_k)\, p_k, \quad \sum_Q f(\xi_k, \eta_k)\, p_k, \quad \sum_R f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Очевидно, что справедливо равенство:

$$\sum_A f(\xi_k, \eta_k)\, p_k = \sum_P f(\xi_k, \eta_k)\, p_k + \sum_Q f(\xi_k, \eta_k)\, p_k + \sum_R f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Переходя к пределу, получим равенство (7), и теорема доказана. Она аналогична следующей теореме в теории обыкновенных интегралов:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

§ 160. Обобщенные двойные интегралы.

Мы пока предполагали, что функция, от которой берется двойной интеграл, непрерывна во всех точках области интеграции, которую в свою очередь предполагали расположенной в конечной части плоскости. Но можно расширить понятие двойного интеграла и на случай, когда или функция прерывна в некоторых точках области интеграции или сама область интеграции бесконечна. Получаемые при этом интегралы назовем обобщенными.

Рассмотрим сначала интегралы от прерывных функций.

Функция двух переменных может быть непрерывна или в отдельных точках или на целых линиях. Так, например, функция

$$\frac{1}{x^2+y^2}$$

имеет только одну точку прерывности в начале координат, где она обращается в бесконечность. Но функция

$$\frac{1}{x^2+y^2-a^2}$$

прерывна уже на всей окружности

$$x^2+y^2=a^2.$$

Предположим же (черт. 133), что данная функция $f(x, y)$ прерывна на площади A, ограниченной контуром C, во-первых, в точках M_1, M_2, M_3, ... и, во-вторых, на линиях L_1, L_2, L_3, ... Окружим каждую из точек M_1, M_2, M_3, ... достаточно малыми контурами D_1, D_2, D_3, ... произвольной формы. Пусть u_1, u_2, u_3, ... — площади, ограниченные этими контурами.

Черт. 133.

Каждую из кривых L_1, L_2, L_3, ... заключим в достаточно близкие к ним замкнутые контуры Q_1, Q_2, Q_3, ...; пусть v_1, v_2, v_3, ... — площади, ограниченные этими контурами. Обозначим через A' площадь, ограниченную снаружи контуром C, а изнутри контурами D_1, D_2, D_3, ..., Q_1, Q_2, Q_3, ... Следовательно,

$$A'=A-(u_1+u_2+u_3+\ldots)-(v_1+v_2+v_3+\ldots).$$

На площади A' данная функция уже непрерывна. Возьмем от нее интеграл:

$$H=\iint\limits_{A'} f(x, y)\,dx\,dy$$

по площади A'.

Черт. 134.

Если контуры D_1, D_2, D_3, ..., Q_1, Q_2, Q_3, ... будем изменять так, чтобы площади u_1, u_2, u_3, ..., v_1, v_2, v_3, ... бесконечно умалялись, то предел интеграла H, если этот предел существует и конечен, называется обобщенным интегралом по площади A. Следовательно, по определению

$$\iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{A'\to A}\iint\limits_{A'} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Чтобы получить обобщенный интеграл, распространенный на площадь A (черт. 134), простирающуюся в некоторых направлениях в бесконечность, поступают так: проводят произвольно одну или несколько

линий L так, чтобы они ограничивали некоторую конечную часть A' площади A. Берут интеграл

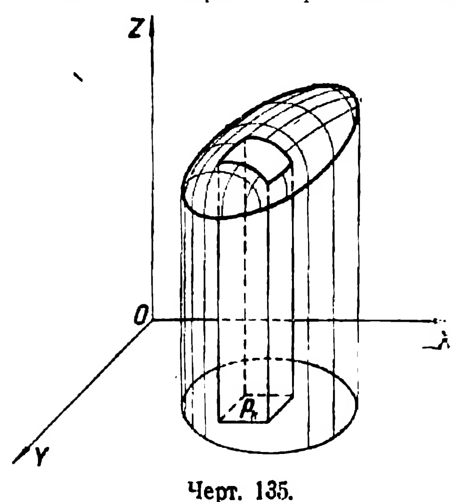
$$H = \iint_{A'} f(x, y)\, dx\, dy$$

и ищут его предел, предполагая, что вспомогательные линии L отодвигаются в бесконечность так, что постепенно все точки площади A присоединяются к площади A'. Если этот предел существует и конечен, то его принимают за интеграл от функции по площади A.

§ 161. Объем цилиндроида.

Прежде чем перейти к решению задачи о вычислении двойного интеграла, рассмотрим некоторые его приложения.

Если цилиндроид ограничен сверху поверхностью $z = f(x, y)$, то, разбив площадь его основания на элементарные площадки p_k и умножив каждую площадку на аппликату какой-нибудь точки, расположенной над площадкой p_k, мы видели, что для объема цилиндроида имеет место равенство



Черт. 135.

$$V = \lim \sum zp = \lim \sum f(x, y)\, p.$$

Но правая часть по определению есть двойной интеграл, а потому

объем цилиндроида, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, определяется двойным интегралом:

$$V = \iint z\, dxdy,$$

распространенным по площади основания цилиндроида.

Следовательно, вычисление объема цилиндроида сводится к вычислению двойного интеграла.

§ 162. Масса и центр тяжести материальной плоской фигуры.

Под материальной поверхностью разумеют тело настолько малой толщины, что практически его можно рассматривать как поверхность. Примером такого тела может служить всякое тело, называемое в общежитии листом.

Пусть A — материальная плоская фигура и p — точка на ней (черт. 136). Всякую площадь q, ограниченную контуром D, если точка p лежит внутри контура D, назовем площадью около точки p. Как известно,



Черт. 136.

средней плотностью массы, заключенной в данной площади, называется отношение массы всего вещества, заключенного в данной площади, к самой площади.

Поэтому если m — масса всего вещества, заключенного в площадке q, построенной около точки p, то средняя плотность массы этой площадки равна

$$\frac{m}{q}. \tag{1}$$

Вообразим теперь, что контур D меняется по какому-нибудь закону так, что размер площадки q бесконечно умаляется, а сам контур D в пределе стягивается в точку p. Это мы будем, например, иметь, если предположим, что контур D есть окружность с центром в p и что радиус этой окружности бесконечно умаляется.

С изменением площадки q средняя плотность ее тоже меняется.

Предел, к которому стремится средняя плотность массы, заключенной в бесконечно умаляющейся площадке, построенной около точки p, называется истинной плотностью массы в точке p.

Если эту плотность в точке p обозначим через ρ, то согласно определению имеем:

$$\rho = \lim_{q \to 0} \frac{m}{q}. \tag{2}$$

В зависимости от того, какой формы контур D и по какому закону размер его бесконечно умаляется, отношение $\frac{m}{q}$ может меняться весьма разнообразно. Но предполагается, что предел этого отношения совершенно не зависит ни от формы площадки q, ни от закона, по которому она бесконечно умаляется.

Пусть до перехода к пределу

$$\frac{m}{q} = \rho + \varepsilon. \tag{3}$$

Как разность между переменной величиной $\frac{m}{q}$ и ее пределом величина ε бесконечно умаляется одновременно с бесконечным умалением площадки q. Из (3) имеем:

$$m = \rho q + \varepsilon q. \tag{4}$$

В первом слагаемом умаляется только q. Относительно q это слагаемое первого порядка, второе же слагаемое высшего порядка. Следовательно, ρq есть главная часть в разложении массы m, а потому

$$m \approx \rho q. \tag{5}$$

К этому заключению можно притти и так. Из (4) имеем:

$$\frac{m}{\rho q} = 1 + \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Но $\lim \varepsilon = 0$, а потому

$$\lim \frac{m}{\rho q} = 1,$$

т. е. имеем равенство (5). Получается

Теорема. Масса m, заключенная в бесконечно малой площадке q, эквивалентна произведению площадки на плотность массы в любой точке этой площадки:

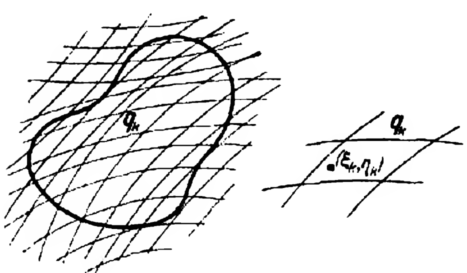
$$m \approx \rho q.$$

Опираясь на этот результат, уже нетрудно решить следующую задачу: дана материальная площадь A; зная плотность ρ массы в каждой точке этой площади, вычислить массу всей площади A.

Плотность ρ в точке p, очевидно, есть функция координат точки p. Пусть

$$\rho = f(x, y).$$

Так как мы предполагаем, что плотность в каждой точке известна, то мы должны считать функцию $f(x, y)$ тоже данной, известной нам функцией.



Черт. 137.

Обозначим через M массу всей площади A. Чтобы вычислить ее, поступим так.

Разбиваем всю площадь на бесконечно малые элементарные площадки

$$q_1, \ q_2, \ q_3, \ \ldots, \ q_k, \ \ldots.$$

Массу, заключенную в площадке q_k, обозначим через m_k.

Очевидно, что вся масса M равна сумме всех масс m_1, m_2, m_3, ..., заключенных в элементарных площадках q_1, q_2, q_3, ...:

$$M = \sum m_k. \tag{6}$$

В каждой площадке q_k возьмем произвольно точку с координатами ξ_k, η_k и обозначим через ρ_k плотность в этой точке:

$$\rho_k = f(\xi_k, \eta_k).$$

Когда площадка q_k будет бесконечно умаляться, то равенство (6 будет сохраняться и в пределе, а потому

$$M = \lim \sum m_k.$$

Но

$$m_k \approx \rho_k q_k,$$

а потому по второму принципу

$$M = \lim \sum \rho_k q_k = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k) q_k =$$
$$= \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_A \rho\, dx\, dy.$$

Получаем теорему:

Масса, заключенная в площади A, определяется по формуле:

$$M = \iint\limits_A \rho\, dx\, dy,$$

где ρ — плотность в точке.

Видим, что вычисление всей массы, заключенной в плоской фигуре, приводится к вычислению двойного интеграла.

Перейдем теперь к определению центра тяжести плоской фигуры.

Пусть попрежнему имеем некоторую материальную площадь A массы M, ограниченную контуром C. Поставим задачу: найти координаты центра тяжести этой площади A, зная плотность массы

$$\rho = f(x, y)$$

в каждой точке площади.

Чтобы определить его, мы случай массы, распределенной непрерывно, сводим на случай изолированных точек.

Разделив площадь A на бесконечно малые площадки $q_1, q_2, q_3, \ldots$ произвольной формы, попрежнему обозначим через m_k массу площадки q_k, внутри которой, тоже совершенно произвольно, возьмем какую-нибудь точку (x_k, y_k). После этого вообразим, что в этой точке сосредоточена масса всей площадки q_k, и будем вместо площади A, по которой масса распределена непрерывно, рассматривать систему уже изолированных материальных точек:

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots, \quad m_n,$$

координаты которых

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_n, y_n).$$

Тогда координаты центра тяжести этой системы точек определятся по формулам

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \qquad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}. \tag{7}$$

Если теперь вообразим, что число элементарных площадок бесконечно возрастает, то тот предел, к которому будут стремиться x_c и y_c, примем за координаты центра тяжести материальной площади A. Следовательно, если эти координаты обозначим через ξ и η, то *по определению* будем иметь:

$$\xi = \lim x_c, \quad \eta = \lim y_c,$$

т. е.

$$\xi = \frac{\lim \sum m_k x_k}{M}, \qquad \eta = \frac{\lim \sum m_k y_k}{M}. \tag{8}$$

Но если все площадки $q_1, q_2, q_3, \ldots$ бесконечно умаляются и если ρ_k — плотность в точке (x_k, y_k), лежащей на площадке q_k, то

$$m_k \approx \rho_k q_k = f(x_k, y_k) q_k,$$

а потому из (8)

$$M\xi = \lim \sum f(x_k, y_k)\, x_k q_k = \iint\limits_A f(x, y)\, x\, dx\, dy,$$

$$M\eta = \lim \sum f(x_k, y_k)\, y_k q_k = \iint\limits_A f(x, y)\, y\, dx\, dy,$$

или короче

$$M\xi = \iint\limits_A x\rho\, dx\, dy, \quad M\eta = \iint y\rho\, dx\, dy. \tag{9}$$

Мы видим, что ξ и η не зависят от того, как мы делим площадь на элементарные площадки и по какому закону их умаляем.

Формулы (9) дают теорему:

Координаты ξ, η центра тяжести и масса M материальной площадки определяются по формулам:

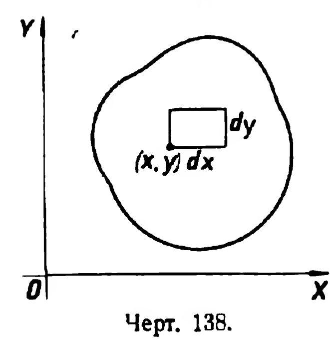
$$M=\iint\limits_A \rho\,dx\,dy,\quad M\xi=\iint\limits_A x\rho\,dx\,dy,\quad M\eta=\iint\limits_A y\rho\,dx\,dy, \qquad (10)$$

где ρ — плотность и где интегралы распространены на всю площадь.

Если $\rho=1$, то ясно, что

$$M=A.$$

Центр тяжести материальной площадки A, покрытой равномерной массой, плотность которой везде равна единице, называется центром тяжести геометрической площади A. Поэтому, полагая в (10) $\rho=1$, заключаем, что **координаты ξ, η центра тяжести геометрической площади A определяются по формулам:**



Черт. 138.

$$A\xi=\iint\limits_A x\,dx\,dy,\quad A\eta=\iint\limits_A y\,dx\,dy.$$

Практически формулы (10) можно вывести быстро, рассуждая так. Мысленно делим всю площадь A прямыми, параллельными осям, на бесконечно малые прямоугольники. Воображаем один из них с вершиной в точке (x, y) и со сторонами dx и dy. Площадь его — $dxdy$; масса его эквивалентна $\rho\,dx\,dy$. Рассматривая каждый такой прямоугольник как материальную точку с координатами x, y и массой $\rho\,dx\,dy$, заключаем, что координаты центра тяжести их равны

$$\frac{\sum x\rho\,dx\,dy}{M},\quad \frac{\sum y\rho\,dx\,dy}{M}.$$

Заменяя знак $\sum$ знаком интеграла, получим (10).

§ 163. Заключение.

1. Предел суммы граничных площадок замкнутого контура равен нулю.

Площадь, ограниченная замкнутым контуром, равна пределу суммы всех внутренних элементарных площадок.

2. Объем элементарного цилиндроида эквивалентен объему элементарного цилиндра.

Объем цилиндроида равен пределу суммы объемов элементарных цилиндров.

3. Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ двух аргументов, распространенным на площадь A, называется предел суммы

$$\sum f(\xi_k, \eta_k)\,p_k,$$

слагаемые которой получаются от умножения каждой элементарной площадки p_k на значение функции в произвольно взятой точке этой площадки:

$$\iint\limits_A f(x, y)\,de = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k)\,p_k.$$

4. При вычислении интеграла граничными площадками можно пренебрегать.

5. Основные свойства двойного интеграла выражаются равенствами:

1)
$$\iint\limits_A dx\,dy = A;$$

2)
$$\iint\limits_A Kf(x, y)\,dx\,dy = K\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy;$$

3)
$$\iint\limits_A \{\varphi(x, y) \pm \psi(x, y)\}\,dx\,dy = \iint\limits_A \varphi(x, y)\,dx\,dy \pm \iint\limits_A \psi(x, y)\,dx\,dy;$$

4)
$$\iint\limits_{P+Q} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_P f(x, y)\,dx\,dy \pm \iint\limits_Q f(x, y)\,dx\,dy;$$

5)
$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta)\,A,$$

где ξ, η — некоторая точка внутри площади.

6. Объем цилиндроида определяется по формуле:

$$V = \iint z\,dx\,dy.$$

7. Положение центра тяжести и масса материальной площадки определяются формулами:

$$M\xi = \iint\limits_A x\rho\,dx\,dy, \qquad M\eta = \iint\limits_A y\rho\,dx\,dy,$$

$$M = \iint \rho\,dx\,dy.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА.

Методы вычисления двойного интеграла весьма разнообразны. Из них здесь мы рассмотрим два основных: вычисление двойного интеграла в декартовых координатах и вычисление его в полярных.

§ 164. Основные свойства интегральной суммы.

При суждениях об интегральной сумме, кроме второго принципа, постоянно приходится пользоваться некоторыми ее свойствами, которые мы формулируем в виде трех лемм.

Первая лемма. **Если факторы интегральной суммы бесконечно малы, то и сама интегральная сумма бесконечно мала.**

Эта лемма нами уже была доказана (стр. 281). Вторую лемму мы получим как простое следствие, прямо вытекающее из определения интеграла как предела суммы.

Всякая переменная величина отличается от своего предела на бесконечно умаляющуюся величину. Поэтому если

$$\lim x = a, \quad \text{то} \quad x = a + \varepsilon,$$

где ε бесконечно умаляется. Но согласно определению

$$\lim \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Мы здесь имеем переменную величину, а именно интегральную сумму, и интеграл как ее предел, а потому

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon, \tag{1}$$

где ε бесконечно умаляется. Это равенство дает вторую лемму.

Вторая лемма. **Если подъинтервалы интегральной суммы бесконечно малы, то она бесконечно мало отличается от соответствующего ей интеграла:**

$$\sum_a^b f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon. \tag{2}$$

Это очевидно геометрически. Если подъинтервалы бесконечно малы, то подъинтегральная сумма как сумма площадей элементарных прямоугольников отличается бесконечно мало от площади трапеции *aABb*, т. е. от интеграла (черт. 139).

Для дальнейшего большое значение имеет следующее обобщение равенства (2). Пусть (a, b) — данный интервал и (a', b') — интервал, лежащий внутри него (черт. 140).

Построим интегральную сумму

$$s' = \sum_{a'}^{b'} f(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{3}$$

для интервала (a', b') и предположим, что не только все интервалы Δx_k бесконечно малы, но что также бесконечно малы и интервалы (a, a') и (b', b), т. е. предположим, что при переходе к пределу не только все интервалы суммы s' бесконечно умаляются, но что также меняются и ее пределы a' и b', бесконечно приближаясь к a и b.

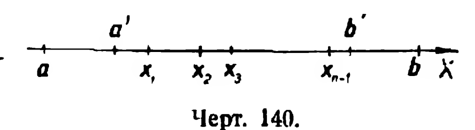
Если к сумме s' прибавить сумму

$$\varepsilon' = f(\xi')(a' - a) + f(\xi'')(b - b')$$

двух слагаемых, соответствующих интервалам (a, a') и (b', b), то мы получим интегральную сумму между пределами a, b, а потому

$$\sum_{a'}^{b'} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{a}^{b} f(\xi_k)\,\Delta x_k - \varepsilon'. \tag{4}$$

Черт. 139.



Черт. 140.

Ясно, что если a' и b' в пределе равны a и b, то $\lim \varepsilon' = 0$, а потому в равенстве (4) ε' бесконечно мало. В то же время

$$\sum_{a}^{b} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \varepsilon'',$$

где ε'' тоже бесконечно мало. Теперь имеем:

$$\sum_{a'}^{b'} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \varepsilon, \tag{5}$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon'' - \varepsilon'.$$

Так как ε' и ε'' бесконечно малы, то и ε бесконечно мало. Этим равенством (5) выражается

Третья лемма. **Если интервалы интегральной суммы бесконечно малы, то сумма бесконечно мало отличается от интеграла, пределы которого бесконечно мало отличаются от пределов суммы. Следовательно, если все Δx и разности $a' - a$ и $b - b'$ бесконечно малы,**

то

$$\sum_{a'}^{b'} f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon, \tag{6}$$

где ε бесконечно мало.

Геометрически это равенство очевидно (черт. 139). Сумма

$$s' = \sum_{a'}^{b'} f(x)\,\Delta x$$

есть не что иное, как сумма площадей всех элементарных прямоугольников трапеции $a'A'B'b'$. Лемма утверждает, что если интервалы (a, a'), (b', b) и те, на которые разделен интервал (a', b'), бесконечно малы, то s' отличается бесконечно мало от площади трапеции $aABb$, т. е.

$$\lim s' = aABb.$$

Этим свойством интегральной суммы в дальнейшем мы будем пользоваться на каждом шагу.

§ 165. Площадь интеграции первого типа.

Величина двойного интеграла, очевидно, зависит не только от вида подъинтегральной функции, но и от формы той площади, на которую распространен интеграл.

Черт. 141.

Предположим, что контур, ограничивающий площадь интеграции, пересекается каждой прямой, параллельной оси Y, не больше, чем в двух точках. Такие площади назовем площадями первого типа. Как увидим, вычисление всякого двойного интеграла, распространенного на площадь любой формы, ограниченную замкнутым контуром, легко приводится к интегрированию по площади первого типа.

Пусть требуется вычислить двойной интеграл

$$G = \iint f(x, y)\,dx\,dy,$$

распространенный на площадь, ограниченную снизу и сверху кривыми AB и CD, слева и справа прямыми, перпендикулярными к оси X в точках a и b (черт. 141).

В частном случае, если точка A совпадает с точкой C, а точка D с точкой B, мы будем иметь обыкновенный замкнутый контур.

Условимся в ряде обозначений.

Через u обозначим ординату нижней кривой, через v — ординату верхней. Мы предполагаем, что каждая из них есть однозначная функция абсциссы. Пусть

$$u=\varphi(x), \quad v=\psi(x).$$

Чтобы получить интегральную сумму, пределу которой равен двойной интеграл, мы должны разделить площадь интеграции на элементарные площадки и в каждой из них выбрать точку. Это деление и этот выбор производим следующим образом.

Проводим две системы прямых. Во-первых, систему прямых, перпендикулярных к оси X и пересекающих ее в точках

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots, x_n.$$

Значения ординат u и v в этих точках обозначим соответственно символами:

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots, u_n,$$

$$v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, \ldots, v_n.$$

Следовательно, вообще

$$u_k=\varphi(x_k), \quad v_k=\psi(x_k).$$

Прямые второй системы, перпендикулярные к оси Y, пусть пересекают ее в точках

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_h, \ldots, y_m.$$

Промежутки между этими числами y_h, а также промежутки между числами x_k мы считаем бесконечно малыми, т. е. такими, которые потом должны будут бесконечно умаляться.

Через p_{kh} обозначим площадь того элементарного прямоугольника, который одновременно принадлежит и вертикальной полосе (x_k, x_{k+1}) и горизонтальной (y_h, y_{h+1}). В нем отметим точку с координатами x_k и y_h. Это будет та из его вершин, которая лежит левее и ниже всех остальных. Ясно, что

$$p_{kh}=(x_{k+1}-x_k)(y_{h+1}-y_h)=\Delta x_k \Delta y_h.$$

Умножая p_{kh} на значение функции в выбранной точке, получим произведение

$$f(x_k, y_h)\,p_{kh}=f(x_k, y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h,$$

про которое будем говорить, что оно принадлежит прямоугольнику p_{kh}. Если подобные произведения мы составим для каждого элементарного прямоугольника, то сумма их всех даст нам интегральную сумму:

$$s=\sum f(x_k, y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h.$$

При этом мы будем принимать во внимание только внутренние элементарные прямоугольники, граничные же отбросим, на что, как мы видели, имеем право.

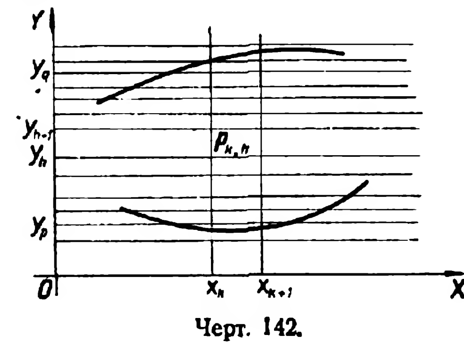
Наша задача заключается в вычислении предела суммы s. Для этого мы предварительно сгруппируем ее слагаемые в отдельные группы следующим образом: в одну и ту же группу мы соединяем все те слагаемые и только те, которые составлены с помощью элементарных прямоугольников, лежащих в одной и той же вертикальной полоске. Таких групп

будет столько, сколько всех вертикальных полосок. Обозначим через s_k сумму всех тех слагаемых, которые принадлежат прямоугольникам, лежащим в вертикальной полоске (x_k, x_{k+1}), что запишем так:

$$s_k = \sum_{(x_k, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h.$$

Мы будем говорить, что каждая сумма s_k получается суммированием вдоль или по соответствующей вертикальной полосе. Сумма s равна сумме всех сумм s_k, что запишем так:

$$s = \sum s_k. \qquad (1)$$



Черт. 142.

Этот переход от сумм s_k к сумме s мы условно будем называть суммированием по полосам. Следовательно, чтобы получить сумму s, мы должны сначала просуммировать ее слагаемые вдоль каждой вертикальной полосы, а потом взять сумму сумм, относящихся ко всем полосам.

Принимая во внимание значение символов s и s_k, мы перепишем равенство (1) в таком виде:

$$\sum f(x_k, y_h)\,p_{kh} = \sum \Big\{ \sum_{(x_k, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h \Big\}. \qquad (2)$$

Рассмотрим внутреннюю сумму (черт. 142)

$$s_k = \sum_{(x_k, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h. \qquad (3)$$

Так как слагаемые этой суммы относятся к прямоугольникам, лежащим в одной и той же вертикальной полоске, то во всех этих слагаемых x_k и Δx_k одни и те же. Поэтому Δx_k как общий множитель может быть вынесен за знак суммы:

$$s_k = \Big\{ \sum_{(x_k, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\,\Delta y_h \Big\} \Delta x_k.$$

Но числа y_h в каждом слагаемом различны. При этом нетрудно видеть, что не все числа

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_m$$

входят в слагаемые суммы s_k, а только те из них, которые промежуточны между u_k и v_k. Если это будут числа $y_p, y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_q$, то точнее можно записать, что

$$s_k = \Big\{ \sum_{y_p}^{y_q} f(x_k, y_h)\,\Delta y_h \Big\} \Delta x_k. \qquad (4)$$

Теперь равенство (2) перепишется так:

$$\sum f(x_k, y_h) p_{kh} = \sum \left\{ \sum_{y_p}^{y_q} f(x_k, y_h) \Delta y_h \right\} \Delta x_k. \qquad (5)$$

При переходе к пределу все Δx_k и Δy_h бесконечно умаляются. Если же мы для ясности представим равенство (5) в таком виде:

$$\sum f(x_k, y_h) p_{kh} = \sum \beta_k \Delta x_k, \qquad (6)$$

где

$$\beta_k = \sum_{y_p}^{y_q} f(x_k, y_h) \Delta y_h, \qquad (7)$$

то становится очевидным, что β_k есть фактор при Δx_k, который при переходе к пределу можно заменить величиной, от которой он отличается бесконечно мало.

На время положим

$$f(x_k, y) = \omega(y).$$

Это возможно, так как x_k во всех слагаемых суммы (7) один и тот же. Имеем

$$\beta_k = \sum_{y_p}^{y_q} \omega(y_h) \Delta y_h = \sum_{y_p}^{y_q} \omega(y) \Delta y,$$

т. е. имеем интегральную сумму. Ее пределы y_p и y_q бесконечно мало отличаются от u_k и v_k, потому что разности

$$u_k - y_p, \quad v_k - y_q$$

при переходе к пределу бесконечно умаляются. Поэтому согласно третьей лемме можно написать, что

$$\beta_k = \sum_{y_p}^{y_q} \omega(y) \Delta y = \int_{u_k}^{v_k} \omega(y)\, dy + \varepsilon_k = \int_{u_k}^{v_k} f(x_k, y)\, dy + \varepsilon_k, \qquad (8)$$

где ε_k бесконечно мало. Мы пишем ε_k, а не просто ε, потому что это ε_k для различных значений k может иметь различные значения.

Если теперь для сокращения письма положим

$$\int_{u=\varphi(x)}^{v=\psi(x)} f(x, y) dy = \Phi(x), \qquad (9)$$

то из (8)

$$\beta_k = \int_{u_k=\varphi(x_k)}^{v_k=\psi(x_k)} f(x_k, y)\, dy + \varepsilon_k = \Phi(x_k) + \varepsilon_k.$$

Заменяя по второму принципу в (5) фактор β_k через $\Phi(x_k)$, имеем

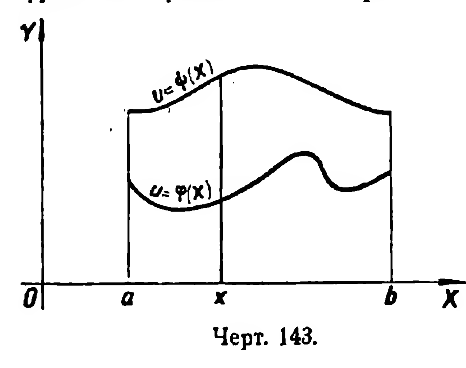
$$\lim \sum f(x_k, y_h) p_{kh} = \lim \sum_a^b \Phi(x_k) \Delta x_k = \int_a^b \Phi(x)\, dx.$$

Левая часть — искомый двойной интеграл. Заменяя в правой части $\Phi(x)$ из (9), получаем теорему:

Если площадь интеграции ограничена снизу и сверху кривыми $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$, слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$ (черт. 143), то

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b\left\{\int_{u=\varphi(x)}^{v=\psi(x)} f(x, y)\,dy\right\}dx.$$

Итак, чтобы получить двойной интеграл, надо над подъинтегральной функцией произвести два простых интегрирования: сначала по y, потом по x. Поэтому-то для обозначения двойного интеграла обыкновенно пишут два знака интеграла.



Черт. 143.

Следует обратить внимание на то, что первое интегрирование по y производится между пределами, зависящими от x. Второе же интегрирование по x производится уже между постоянными пределами.

Что касается самого доказательства теоремы, то по идее оно чрезвычайно просто и может быть изложено в нескольких строках, если отбросить объяснения различных обозначений.

В самом деле, пользуясь правом группировать слагаемые в различные группы, мы имеем основное равенство

$$\sum f(x_k, y_h)\,p_{kh}=\sum\left\{\sum_{(x_k, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h\right\}. \qquad (10)$$

От него, вынося Δx_k во внутренней сумме общим множителем и несколько меняя обозначения, переходим к равенству

$$\sum f(x_k, y_h)\,p_{kh}=\sum_a^b\left\{\sum_{y_p}^{y_q} f(x_k, y_h)\,\Delta y_h\right\}\Delta x_k. \qquad (11)$$

Заменяя фактор при Δx_k интегралом, от которого он отличается бесконечно мало, и переходя к пределу, сначала получаем равенство:

$$\lim\sum f(x_k, y_h)\,p_{kh}=\lim\sum_a^b\left\{\int_{u=\varphi(x_k)}^{v=\psi(x_k)} f(x_k, y)\,dy\right\}\Delta x_k,$$

и окончательно

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b\left\{\int_u^v f(x, y)\,dy\right\}dx.$$

Сравнивая это равенство с (11), мы видим, что интегрирование по y соответствует суммированию вдоль полос, а интегрирование по x — суммированию по полосам.

Эта связь становится еще яснее, если мы в равенстве (11) опустим индексы у промежуточных чисел. Тогда в сжатом виде все доказательство может быть изложено в следующих двух строках: так как

$$\sum f(x, y)\Delta x\Delta y = \sum \left\{ \sum f(x, y)\Delta y \right\} \Delta x, \quad (12)$$

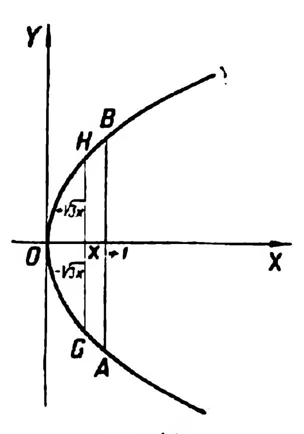
то в пределе

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_u^v f(x, y)\,dy \right\} dx. \quad (13)$$

Читателю рекомендуется повторять приведенное доказательство до тех пор, пока он не достигнет того, чтобы без всяких вспомогательных выкладок ему было вполне ясно, как с помощью второго принципа и третьей леммы из (12) получается (13).

При практическом вычислении всегда надо обращать тщательное внимание на правильное установление пределов каждого интеграла. Для этого полезно рисовать себе такую картину: воображаем площадь интеграции разделенной на элементарные площадки. Затем мысленно выделяем одну какую-нибудь вертикальную полосу, левая сторона которой пересекает ось X в некоторой произвольно взятой точке x (черт. 143). Мы воображаем, что полоски настолько тонки, что ширина их не превышает ширины чернильной черты. Следовательно, начертить правую сторону полосы фактически нельзя, потому что она должна на чертеже слиться с левой стороной. Поэтому ордината в точке x изображает, так сказать, всю полоску.

Интегрирование по y соответствует суммированию вдоль полоски. Поэтому, чтобы установить пределы при интегрировании по y, мы смотрим, в каких пределах изменяется y, если мы будем итти по площади вдоль произвольно взятой ординаты. Ясно, что y будет изменяться от ординаты u нижней кривой до ординаты v верхней кривой. Это и будут пределы при первом интегрировании по y, причем эти пределы являются функциями x.



Черт. 144.

Чтобы найти пределы интеграла по x, мы смотрим, в каких пределах надо изменять x, чтобы перебрать все полоски.

Пусть, например, требуется вычислить двойной интеграл

$$G = \iint xy^2 dx dy,$$

распространенный на площадь AOB, ограниченную дугой параболы

$$y^2 = 3x$$

и хордой AB, пересекающей ось X в точке $x = +1$ (черт. 144).

Когда мы идем по какой-нибудь вертикальной полосе GH, абсцисса которой x, то y меняется от $-\sqrt{3x}$ до $+\sqrt{3x}$. Это и будут пределы интегрирования по y. Пределы же интегрирования по x будут 0 и 1,

потому что в этих пределах надо изменять x, чтобы получить все вертикальные полосы. Следовательно,

$$\iint\limits_{AOB} xy^2 dx dy = \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_{-\sqrt{3x}}^{+\sqrt{3x}} xy^2 dy \right\} dx.$$

Вычисляя сначала внутренний интеграл, найдем

$$\int\limits_{-\sqrt{3x}}^{+\sqrt{3x}} xy^2 dy = \Bigg/_{y=-\sqrt{3x}}^{y=+\sqrt{3x}} \frac{xy^3}{3} = 2\sqrt{3}\, x^2 \sqrt{x},$$

а потому окончательно

$$\iint\limits_{AOB} xy^2 dx dy = \int\limits_0^1 2\sqrt{3}\, x^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

§ 166. Площадь интеграции второго типа.

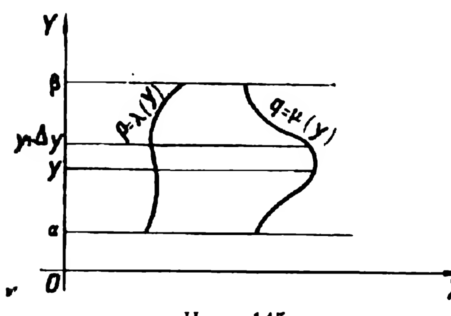
Пусть площадь интеграции ограничена снизу и сверху прямыми:

$$y = \alpha; \quad y = \beta,$$

слева и справа кривыми, уравнения которых:

$$p = \lambda(y), \quad q = \mu(y),$$

где p — абсцисса левой, а q — абсцисса правой кривой. Такую площадь назовем площадью второго типа (черт. 145).



Черт. 145.

Рассматриваемый случай, очевидно, отличается от предыдущего только тем, что x и y меняются ролями. Соответственно этому изменяются и доказательство и результат.

Мысленно разбив площадь на элементарные прямоугольники и построив интегральную сумму

$$s = \sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y,$$

мы группируем ее слагаемые, соединяя в одну группу те из них, которые соответствуют прямоугольникам, лежащим в одной горизонтальной полоске. Если через s_y обозначим сумму тех слагаемых, которые принадлежат полоске, заключенной между прямыми, ординаты которых y и $y + \Delta y$, то

$$s_y = \sum_{(y,\, y+\Delta y)} f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y,$$

где в правой части во всех слагаемых y и Δy одни и те же. Поэтому Δy можно вынести за знак суммы. Что же касается x, то он принимает ряд значений, промежуточных между p и q. Следовательно,

$$s_y = \left\{ \sum_p^q f(x, y)\, \Delta x \right\} \Delta y.$$

Мы ставим пределами суммы p и q. Точнее надо бы было поставить символы первого и последнего числа из чисел x_k, лежащих в интервале (p, q).

Так как сумма s равна сумме всех сумм s_y, то имеем основное равенство:

$$\sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y = \sum_\alpha^\beta \left\{ \sum_p^q f(x, y)\, \Delta x \right\} \Delta y. \qquad (1)$$

Заменяем внутреннюю сумму как фактор при Δy соответствующим интегралом:

$$\sum_p^q f(x, y)\, \Delta x = \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\, dx + \varepsilon_y,$$

где ε_y бесконечно мало и где интеграл — уже только функция y. Пусть

$$\int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\, dx = \omega(y).$$

Последовательно имеем

$$\lim \sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y = \lim \sum_\alpha^\beta \left\{ \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy = \lim \sum_\alpha^\beta \omega(y)\, \Delta y =$$

$$= \int_\alpha^\beta \omega(y)\, dy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy$$

и получаем теорему:

если площадь интеграции ограничена двумя прямыми

$$y = \alpha \quad \text{и} \quad y = \beta$$

и двумя кривыми

$$p = \lambda(y), \quad q = \mu(y),$$

то

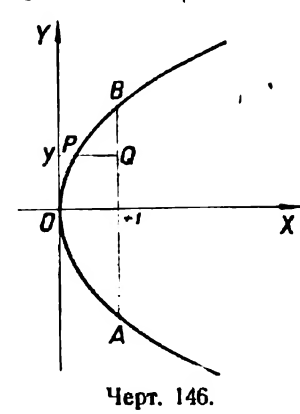
$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy.$$

Теперь первое интегрирование совершается по x, причем пределами интеграла служат функции y. Второе интегрирование по y производится уже между постоянными пределами α и β.

Рассмотрим пример. Мы уже вычислили интеграл (стр. 331)

$$G = \iint_{AOB} xy^2 dx\, dy,$$

распространенный на площадь, ограниченную параболой $y^2 = 3x$ и прямой $x = +1$. При этом первое интегрирование мы производили по y, второе по x. Но контур этой площади пересекается всякой прямой, параллельной оси X, только в двух точках. Поэтому мы можем произвести первое интегрирование по x, второе по y. Мысленно выделяем какую-нибудь произвольно взятую горизонтальную полоску PQ, ордината которой y (черт. 146). Когда мы идем по этой полоске, то x меняется от абсциссы точки P до абсциссы точки Q. Следовательно, первое интегрирование по x мы должны произвести между пределами $\frac{y^2}{3}$ и $+1$.



Черт. 146.

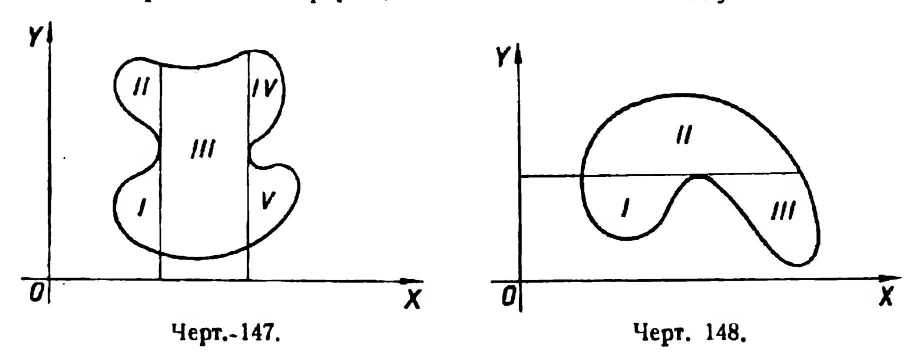
Чтобы получить все горизонтальные полосы, мы должны изменять y от ординаты точки A до ординаты точки B. Поэтому второе интегрирование по y мы должны произвести между пределами $-\sqrt{3}$ и $+\sqrt{3}$. Следовательно, имеем:

$$\iint\limits_{AOB} xy^2 dxdy = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \left\{ \int\limits_{\frac{y^2}{3}}^{+1} xy^2\, dx \right\} dy = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Два различных способа вычисления двойного интеграла дали, как и должно было ожидать, один и тот же результат.

§ 167. Площадь интеграции произвольной формы.

Имея формулы для вычисления интеграла по площадям первого и второго типа, мы можем вычислить двойной интеграл, распространенный на площадь произвольной формы, и можем это сделать двумя способами.

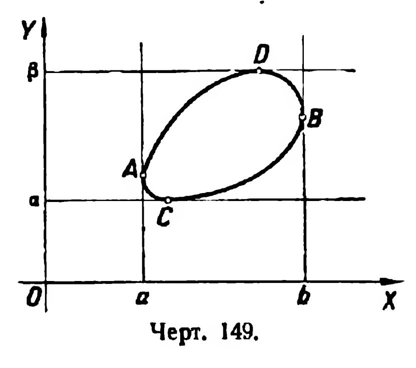


Черт.-147. Черт. 148.

Мы можем разделить всякую площадь прямыми, параллельными оси Y, на несколько площадей первого типа. Так, например, площадь на чертеже 147 разделена на пять площадей первого типа. Или мы можем прямыми, параллельными оси Y, разделить данную площадь на несколько площадей второго типа. Так, например, площадь на чертеже 148 разделена на три площади второго типа.

Вычислив интеграл на каждой части площади и взяв потом их сумму, мы найдем интеграл по всей площади.

Что касается вопроса, выгоднее ли делить данную площадь на площади первого или второго типа, то это зависит от вида и площади и подъинтегральной функции. На практике приходится пробовать тот и другой способ и смотреть, который приводит к более простым вычислениям.



Черт. 149.

Особого внимания заслуживает случай, когда контур площади пересекается только в двух точках как всякой прямой, параллельной оси Y, так и всякой прямой, параллельной оси X. Пусть, например, $ACBD$ — такой контур. Проводим две крайние ординаты aA и bB, ограничивающие контур слева и справа. Пусть они касаются контура в точках A и B. Мы данную площадь можем рассматривать как площадь первого типа. Пусть уравнение нижней половины контура, т. е. кривой ACB, такое:

$$y=\varphi(x).$$

Уравнение же верхней половины ADB пусть будет:

$$y=\psi(x).$$

По доказанному имеем:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy=\int\limits_a^b \left\{\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\right\} dx. \qquad (1)$$

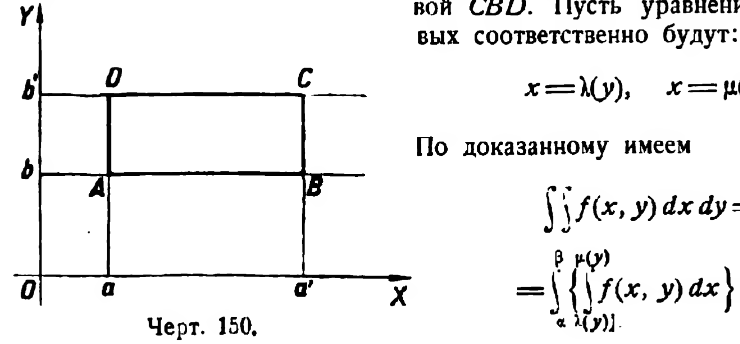
Но проведя крайние абсциссы αC и βD, ограничивающие контур снизу и сверху, мы можем рассматривать данную площадь как площадь второго типа, которая слева ограничена кривой CAD, а справа кривой CBD. Пусть уравнения этих кривых соответственно будут:

$$x=\lambda(y), \quad x=\mu(y).$$

По доказанному имеем

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta \left\{\int\limits_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\, dx\right\} dy. \qquad (2)$$



Черт. 150.

В первом случае мы должны интегрировать сначала по y, потом по x. Во втором случае наоборот — сначала по x, потом по y. В том и другом случае пределами первого интеграла служат функции того переменного, по которому интегрируется второй интеграл.

Если площадью интеграции служит прямоугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными осям координат, то данную площадь мы можем по желанию рассматривать и как площадь первого типа и как площадь второго типа.

Рассматривая ее как площадь первого типа, имеем:

$$\iint\limits_{ABCD} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^{a'} \left\{ \int\limits_b^{b'} f(x, y)\,dy \right\} dx. \tag{3}$$

Применяя же формулу для площади второго типа, найдем

$$\iint\limits_{ABCD} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_b^{b'} \left\{ \int\limits_a^{a'} f(x, y)\,dx \right\} dy. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), имеем:

$$\int\limits_b^{b'} \left\{ \int\limits_a^{a'} f(x, y)\,dx \right\} dy = \int\limits_a^{a'} \left\{ \int\limits_b^{b'} f(x, y)\,dy \right\} dx, \tag{5}$$

и мы получили новое доказательство для теоремы об интегрировании определенного интеграла по параметру в предположении, что пределы интеграла являются постоянными, не зависящими от аргументов функции. Но если вместо прямоугольника на чертеже мы возьмем более общий контур, то из равенств (1) и (2) получаем равенство:

$$\int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \right\} dx = \int\limits_\alpha^\beta \left\{ \int\limits_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy. \tag{6}$$

Здесь в левой части первое интегрирование производится по y уже между пределами, которые являются функциями второго аргумента. Мы видим, что и в этом случае можно изменить порядок интегрирования, но также видим, что при этом пределы интегралов заменяются совершенно иными.

Вообще если мы имеем функцию $f(x, y)$ двух переменных, то мы можем проинтегрировать ее между двумя пределами, которые в свою очередь функции другого переменного. Пусть

$$H = \int\limits_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx = \omega(y). \tag{7}$$

Эту функцию $\omega(y)$ мы можем проинтегрировать тоже между двумя пределами уже необходимо постоянными. Пусть

$$G = \int\limits_\alpha^\beta \left\{ \int\limits_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy. \tag{8}$$

Можно ли, и если можно, то как, изменить порядок интегрирования? Ответ зависит от свойств функций $\lambda(y)$ и $\mu(y)$.

Строим кривые

$$x = \lambda(y) \quad \text{и} \quad x = \mu(y). \tag{9}$$

Предположим, что они в своей совокупности образуют замкнутый контур типа чертежа 149. Тогда вопрос о перемене порядка интегрирования решается просто. Интеграл (8) равен двойному интегралу (1), и мы получаем равенство (2), которое указывает, как изменяются пределы интегралов при изменении порядка интегрирования. Но так просто дело

обстоит очень редко. Для этого необходимо, чтобы функции $\lambda(y)$ и $\mu(y)$ изображались кривыми, из которых вторая лежала бы правее первой и которые вместе образовывали бы замкнутый контур, пересекающийся прямыми, параллельными оси Y, только в двух точках. В своей совокупности эти условия могут удовлетворяться только в редких случаях. Но даже если эти условия и не удовлетворены, то все-таки можно изменить порядок интегрирования. Пусть, например, функции

$$p=\lambda(y), \quad q=\mu(y)$$

изображаются кривыми AB и CD (черт. 151). Через p обозначаем абсциссу первой кривой, а через q — абсциссу второй. Эти две кривые не дают одного замкнутого контура. Но они дают их два: контур ACE и контур DBE. Поэтому начинаем с того, что интеграл

Черт. 151.

$$G=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx\right\} dy \tag{8}$$

выражаем через двойные интегралы, распространенные по площадям, ограниченным этими контурами. Обозначая через γ ординату точки E, прежде всего имеем:

$$G=G_1+G_2, \tag{9}$$

где

$$G_1=\int_{\alpha}^{\gamma}\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx\right\} dy, \quad G_2=\int_{\gamma}^{\beta}\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx\right\} dy. \tag{10}$$

Легко видеть, что интеграл G_2 равен двойному интегралу по площади AEC. Но интеграл G_1 равен не двойному интегралу по площади DEB, а этому интегралу, взятому со знаком минус, потому что кривая $\mu(y)$, изображающая верхний предел, лежит левее кривой $\lambda(y)$, изображающей нижний предел. Итак,

$$G_1=-\iint_{DEB} f(x, y)\,dx\,dy, \quad G_2=\iint_{AEC} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{11}$$

Каждый из этих двух интегралов мы можем вычислить, интегрируя сначала по y, потом по x. Тем самым в интеграле G будет изменен порядок интегрирования.

§ 168. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Мы нашли метод для вычисления двойного интеграла, разбивая площадь интеграции на элементарные площадки прямыми, параллельными осям координат. Разбивая площадь интеграции на элементы иными кривыми, мы можем получить новые методы для вычисления двойных интегралов.

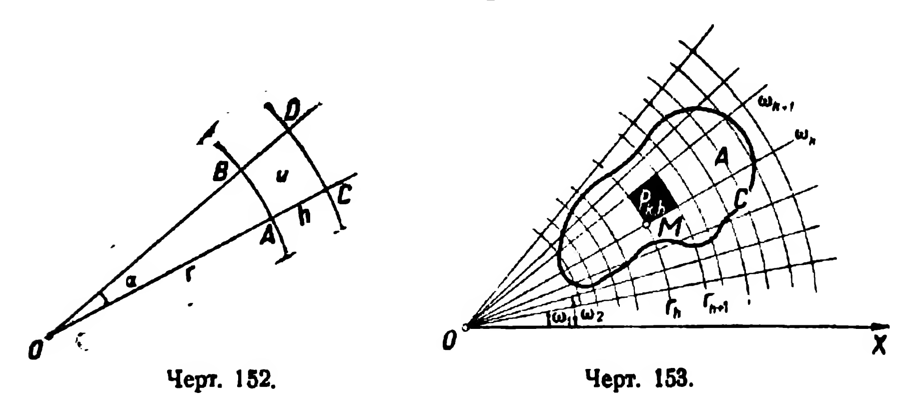
Докажем предварительно лемму. Пусть α — угол между прямыми OC и OD. Принимая точку O за центр, описываем радиусом r дугу AB и радиусом $r+h$ дугу CD. Пусть u — площадь фигуры $ABDC$, которую назовем кривым четырехугольником; h и α назовем его высотой и углом. Если α и h бесконечно умаляются, то u тоже бесконечно умаляется. Вычислим величину, эквивалентную u.

Так как площади секторов COD и AOB соответственно равны

$$\frac{1}{2}(r+h)^2\alpha \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}r^2\alpha,$$

то для u как разности между ними имеем:

$$u = rh\alpha + \frac{1}{2}h^2\alpha. \qquad (1)$$



Черт. 152. Черт. 153.

Дальше можно итти двояко. С одной стороны,

$$\frac{u}{rh\alpha} = 1 + \frac{h}{2r},$$

а потому если h и α бесконечно умаляются, то

$$\lim \frac{u}{rh\alpha} = 1$$

и, следовательно,

$$u \approx rh\alpha. \qquad (2)$$

Или рассуждаем так: если h и α бесконечно малы, то в (1) порядок второго слагаемого, равного $\frac{1}{2}h^2\alpha$, выше порядка первого слагаемого, а потому имеем (2). В результате получаем лемму:

Если угол α и высота h кривого четырехугольника радиуса r бесконечно малы, то его площадь эквивалентна $rh\alpha$.

Пусть s — дуга AB. Так как $s = r\alpha$, то $u \approx sh$. Следовательно,

с точки зрения эквивалентности бесконечно малый кривой четырехугольник можно рассматривать как прямоугольник.

Предположим теперь, что мы должны вычислить двойной интеграл:

$$G = \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

распространенный на площадь A, ограниченную контуром C. Делим плоскость на элементарные площадки следующим образом (черт. 153): из начала координат проводим систему лучей, наклоненных к оси X под углами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, и строим систему кругов радиусов r_1, r_2, $r_3, \ldots$ с центром в O. Всякую часть плоскости, заключенную между двумя смежными лучами, наклоненными под углами ω_k и ω_{k+1}, назовем секториальной полосой (ω_k, ω_{k+1}); часть же плоскости, лежащую между двумя смежными окружностями радиусов r_k и r_{k+1}, назовем кольцом (r_k, r_{k+1}).

Системой лучей и кругов плоскость разделится на кривые четырехугольники. Символом p_{kh} обозначим тот из них, который лежит одновременно в секториальной полосе (ω_k, ω_{k+1}) и кольце (r_h, r_{h+1}). В нем возьмем точку M, полярные координаты которой r_h и ω_k. Следовательно ее декартовы координаты будут $r_h \cos \omega_k$ и $r_h \sin \omega_k$, а потому та сумма s пределу которой равен двойной интеграл, представится в таком виде

$$s = \sum f(r_h \cos \omega_k,\ r_h \sin \omega_k)\, p_{k,h}. \tag{3}$$

Воображаем, что число лучей и концентрических окружностей бесконечно возрастает так, что размеры элементарных площадок бесконечно умаляются. Тогда при вычислении предела суммы s можно каждую площадку p_{kh} заменить эквивалентной ей величиной. Но если, придерживаясь обычных обозначений, мы положим:

$$\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k, \quad \Delta r_h = r_{h+1} - r_h,$$

то, как мы видели, $p_{kh} \approx r_h \Delta\omega_k \Delta r_h$. Поэтому вместо (3) можем рассматривать такую сумму:

$$s' = \sum f(r_h \cos \omega_k,\ r_h \sin \omega_k)\, r_h \Delta r_h \Delta\omega_k. \tag{4}$$

Полагая же для сокращения письма

$$rf(r \cos \omega,\ r \sin \omega) = \Phi(r, \omega), \tag{5}$$

получим

$$s' = \sum \Phi(r_h, \omega_k)\, \Delta r_h \Delta\omega_k, \tag{6}$$

и предел этой суммы равен искомому двойному интегралу G.

Мы можем теперь поступить двояким образом: можем все слагаемые суммы s' соединить в различные группы, относя в одну и ту же группу все слагаемые, соответствующие элементарным площадкам, лежащим в одном и том же кольце. Пусть

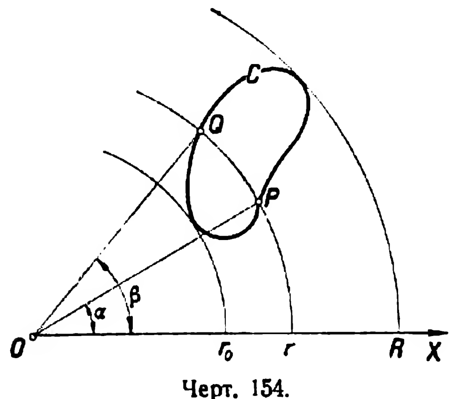
$$s'_h = \sum_{(r_h, r_{h+1})} \Phi(r_h, \omega_k)\, \Delta r_h\, \Delta\omega_k \tag{7}$$

—сумма той группы слагаемых, которые принадлежат элементарным площадкам в кольце (r_h, r_{h+1}). Тогда очевидно, что s' равна сумме всех s'_h.

Про такой способ группирования слагаемых мы будем говорить, что мы сначала суммируем вдоль каждого кольца, а потом по кольцам. Это один способ. Но мы можем также предварительно соединять в отдельные группы все слагаемые, относящиеся к элементарным площадкам, лежащим в одной и той же секториальной полоске. Каждая такая группа дает свою сумму и сумма всех таких сумм даст сумму s'.

Про этот способ мы будем говорить, что мы суммируем сначала вдоль секториальных полосок, а потом по полоскам.

Тот и другой способ после перехода к пределу дает свою формулу для вычисления двойного интеграла.



Черт. 154.

В дальнейшем мы часто будем опускать индексы. Так, вместо (6) и (7) будем писать:

$$s' = \sum \Phi(r, \omega)\,\Delta r\,\Delta\omega, \qquad (6)$$

$$s'_h = \sum_{(r_h,\ r_{h+1})} \Phi(r, \omega)\,\Delta r\,\Delta\omega. \qquad (7)$$

Будем суммировать сначала вдоль колец, а потом по кольцам.

Предположим, что контур C (черт. 154) пересекается каждой окружностью радиуса r только в двух точках P и Q, и пусть α—угол наклона луча OP, а β—угол наклона луча OQ, причем $\alpha < \beta$. Пусть также r_0 и R—наименьшее и наибольшее из тех значений, которые может принимать r, т. е. пусть r_0 и R—те границы, в которых должен изменяться r, чтобы окружность радиуса r пересекала контур C.

Для каждого определенного значения r точки P и Q занимают определенные положения, углы же α и β имеют определенные значения. С изменением r будут, вообще говоря, изменяться α и β. Следовательно, α и β—некоторые функции r. Пусть

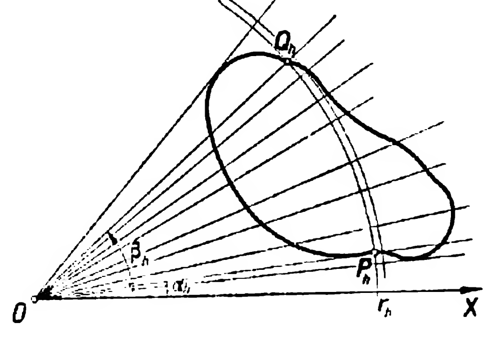
$$\alpha = \varphi(r), \quad \beta = \psi(r). \qquad (8)$$

Эти функции мы должны каждый раз находить из геометрических свойств контура.

Рассмотрим сумму

$$s'_h = \sum_{(r_h,\ r_{h+1})} \Phi(r_h, \omega_k)\,\Delta r_h\,\Delta\omega_k = \sum_{(r_h,\ r_{h+1})} \Phi(r, \omega)\,\Delta r\,\Delta\omega$$

тех слагаемых, которые соответствуют кольцу (r_h, r_{h+1}).



Черт. 155.

Пусть (черт. 155) окружность радиуса r_h пересекает контур C в точках P_h и Q_h. Через α_h и β_h обозначим углы наклона лучей OP_h и OQ_h к оси X. Согласно (8)

$$\alpha_h = \varphi(r_h), \quad \beta_h = \psi(r_h). \qquad (9)$$

Для всех слагаемых, относящихся к одному и тому же кольцу, r_h и Δr_h—величины постоянные, а потому

$$s'_h = \left\{ \sum_{(r_h,\ r_{h+1})} \Phi(r_h, \omega_k)\,\Delta\omega_k \right\} \Delta r_h.$$

Так как для получения слагаемых этой суммы надо брать из величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ только те, которые промежуточны между α_h и β_h, то мы запишем, что

$$s'_h = \left\{ \sum_{\alpha_h}^{\beta_h} \Phi(r_h, \omega_k)\Delta\omega_k \right\} \Delta r_h. \tag{10}$$

Чтобы получить s', надо взять сумму всех s'_h. Для этого надо взять все значения $r_1, r_2, r_3, \ldots,$ промежуточные между r и R. Это запишем так:

$$s' = \sum s'_h = \sum_{r_0}^{R} \left\{ \sum_{\alpha_h}^{\beta_h} \Phi(r_h, \omega_k)\Delta\omega_k \right\} \Delta r_h. \tag{11}$$

Переходим теперь к пределу, предполагая, что все $\Delta\omega_k$ и Δr_h бесконечно умаляются. Заменяя фактор при Δr_h бесконечно мало отличающимся от него интегралом

$$\int_{\alpha_h = \varphi(r_h)}^{\beta_h = \psi(r_h)} \Phi(r_h, \omega)\, d\omega = F(r_h), \tag{12}$$

последовательно находим:

$$\lim s' = \lim \sum_{r_0}^{R} F(r_h)\Delta r_h = \int_{r_0}^{R} F(r)\, dr, \tag{13}$$

где левая часть — искомый двойной интеграл и где согласно (12)

$$F(r) = \int_{\alpha = \varphi(r)}^{\beta = \psi(r)} \Phi(r, \omega)\, d\omega. \tag{14}$$

Из (13) и (14), заменяя функцию Φ ее значением, получаем теорему: **Если контур C (черт. 154) пересекается только в двух точках всякой окружностью с центром в O, то**

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{r_0}^{R} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\omega, r\sin\omega)\, r\, d\omega \right\} dr.$$

Посмотрим теперь, что мы получим, если слагаемые суммы s' будем сначала собирать не по кольцам, а по секториальным полосам.

Предположим, что всяким лучом, наклоненным под углом ω к полярной оси, контур C пересекается не более чем в двух точках P и Q, радиусы-векторы которых обозначим через ρ_1 и ρ_2. Пусть

$$\rho_1 = \varphi(\omega), \quad \rho_2 = \psi(\omega).$$

Через ω_0 и Ω обозначим те границы, в которых должен быть заключен угол ω, чтобы луч, наклоненный к оси X под углом ω, пересекал контур.

Попрежнему имеем:

$$s' = \sum f(r_h\cos\omega_k, r_h\sin\omega_k) r_h \Delta r_h \Delta\omega_k = \sum \Phi(r_h, \omega_k)\Delta r_h \Delta\omega_k.$$

Пусть s'_k—сумма слагаемых, относящихся к секториальной полоске (ω_k, ω_{k+1}):

$$s'_k = \sum_{(\omega_k, \omega_{k+1})} \Phi(r_h, \omega_k)\Delta r_h \Delta\omega_k.$$

Все эти слагаемые имеют общий множитель $\Delta\omega_k$; из чисел же r_1, r_2, r_3, ... в них входят только те, которые промежуточны между ρ_1 и ρ_2, а потому

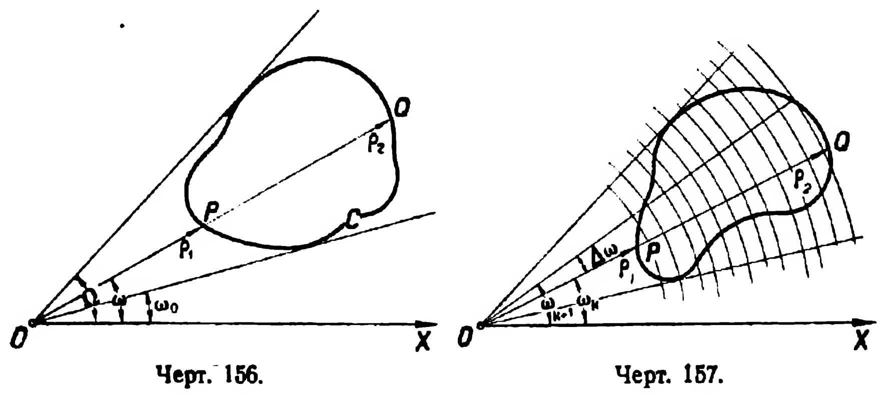
$$s'_k = \left\{ \sum_{\rho_1=\varphi(\omega_k)}^{\rho_2=\psi(\omega_k)} \Phi(r_h, \omega_k)\Delta r_h \right\} \Delta\omega_k.$$

Ясно, что сумма s' может быть представлена так:

$$s' = \sum_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \sum_{\rho_1=\varphi(\omega_k)}^{\rho_2=\psi(\omega_k)} \Phi(r_h, \omega_k)\Delta r_h \right\} \Delta\omega_k.$$

Следовательно,

$$\lim s' = \lim \sum_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_{\varphi(\omega_k)}^{\psi(\omega_k)} \Phi(r, \omega_k)\, dr \right\} \Delta\omega_k = \int_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_{\varphi(\omega)}^{\psi(\omega)} \Phi(r, \omega)\, dr \right\} d\omega.$$



Черт. 156.

Черт. 157.

Теорема. **Если контур пересекается каждым лучом не более как в двух точках** (черт. 156), **то**

$$\iint^{S} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(r\cos\omega, r\sin\omega)\, r\, dr \right\} d\omega.$$

Итак, мы имеем две формулы для вычисления двойного интеграла в полярных координатах. Из них приложима та или другая, смотря по тому, пересекается ли контур только в двух точках лучом или окружностью.

Чтобы легче удержать в памяти эти формулы, повторим доказательство, опуская индексы у букв. Мы воображаем площадь разделенной на элементарные кривые четырехугольники. Площадь какого-нибудь четырехугольника (черт. 158), полярные координаты вершины которого r и ω, эквивалентна

$$r dr \cdot d\omega.$$

Поэтому двойной интеграл есть предел суммы

$$\sum f(r\cos\omega, r\sin\omega)\, r dr\, d\omega.$$

Группируя слагаемые по кольцам или по секториальным полоскам, мы в пределе получим первое интегрирование по r или по ω.

Внимательное рассмотрение чертежа укажет нам пределы каждого интегрирования.

Примеры. 1. (Черт. 159). Пусть требуется вычислить двойной интеграл

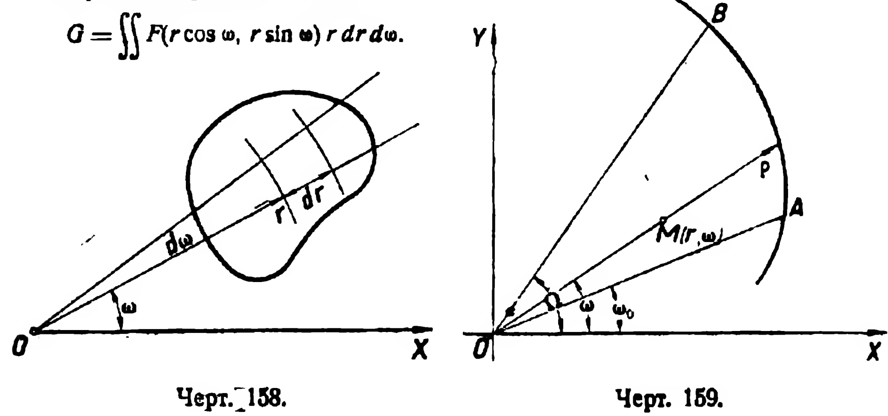
$$G=\iint F(x, y)\, dx\, dy \tag{1}$$

по площади, ограниченной прямыми OA и OB, наклоненными к оси X под углами ω_0 и Ω, и кривой AB, уравнение которой

$$\rho=f(\omega). \tag{2}$$

В полярных координатах имеем:

$$G=\iint F(r\cos\omega, r\sin\omega)\, r\, dr\, d\omega.$$



Черт. 158. Черт. 159.

Будем первое интегрирование производить по r. Когда точка M движется по лучу OM, наклоненному под углом ω, то r меняется от нуля до ρ, а потому

$$G=\int_{\omega_0}^{\Omega}\left\{\int_0^{\rho=f(\omega)} F(r\cos\omega, r\sin\omega)\, r\, dr\right\} d\omega. \tag{3}$$

В частном случае, если тождественно $F(x, y)=1$, то G равняется площади AOB. Обозначая эту площадь через u, из (3) имеем:

$$u=\int_0^{\Omega}\left\{\int_0^{\rho} r\, dr\right\} d\omega=\frac{1}{2}\int_0^{\Omega}\rho^2\, d\omega,$$

и мы получили знакомое выражение для площади в полярных координатах.

2. Пусть требуется вычислить интеграл (черт. 160):

$$G=\iint\sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy \tag{1}$$

по площади круга диаметра a, центр которого лежит на оси X в точке $\frac{a}{2}$. Обозначая через r и ω полярные координаты какой-нибудь точки M, имеем:

$$G=\iint\sqrt{a^2-r^2}\, r\, dr\, d\omega. \tag{2}$$

Интегрируем сначала по кольцу PQ произвольного радиуса r; при этом ω изменяется от α до β, где $\alpha = -\beta$. Собирая затем все кольца, мы должны изменить r от нуля до a. Следовательно,

$$G = \int_0^a \left\{ \int_\alpha^\beta \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, d\omega \right\} dr. \tag{3}$$

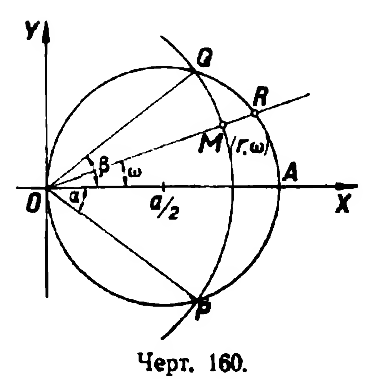
Если же мы пойдем сначала по секториальной полосе, то r меняется от нуля до OR. Чтобы получить все секториальные полосы, надо менять ω от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$G = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{OR} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr \right\} d\omega. \tag{4}$$

Замечая, что из прямоугольного треугольника OQA:

$$r = a\cos\beta, \quad \beta = \arccos\frac{r}{a}$$

и что $\alpha = -\beta$, мы из (3) получаем:



Черт. 160.

$$G = \int_0^a \left\{ \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{+\arccos\frac{r}{a}} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, d\omega \right\} dr. \tag{5}$$

Так как $OR = a\cos\omega$, то (4) дает:

$$G = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{a\cos\omega} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr \right\} d\omega. \tag{6}$$

Замечая, что

$$\int \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr = \frac{1}{2}\int \sqrt{a^2 - r^2}\, dr^2 = -\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

мы из (6) находим:

$$G = \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{\sin^6\omega})\, d\omega. \tag{7}$$

Было бы грубой ошибкой принять, что $\sqrt{\sin^6\omega} = \sin^3\omega$.

Пока ω меняется от нуля до $+\frac{\pi}{2}$, это верно; но если ω заключен между нулем и $-\frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{\sin^6\omega} = -\sin^3\omega$. Ввиду этого мы должны разбить интеграл (7) на два. Имеем:

$$G = \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \sin^3\omega)\, d\omega + \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\omega)\, d\omega = \frac{(3\pi - 4)\, a^3}{9}. \tag{8}$$

Если же мы станем вычислять интеграл G по формуле (5), то легко найдем внутренний интеграл и получим

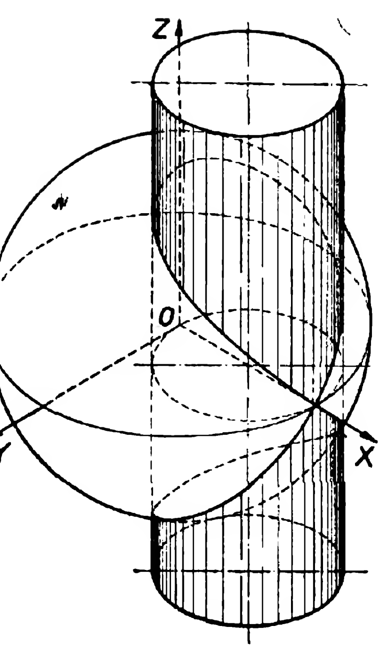
$$G = 2\int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\arccos\frac{r}{a}\,dr. \qquad (9)$$

Этот интеграл можно было бы вычислить интегрированием по частям, но вычисления были бы сложны. Напротив, зная (8), мы заключаем, что

$$\int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\arccos\frac{r}{a}\,dr = \frac{(3\pi - 4)\,a^3}{18}. \qquad (10)$$

Мы видим, что различные способы вычисления двойных интегралов дают возможность находить значение некоторых обыкновенных интегралов.

Решим теперь так называемую задачу Вивиани. На радиусе сферы, равном a, построена в плоскости экватора, как на диаметре, окружность, а на ней прямой цилиндр. Вычислить объем, вырезаемый из сферы этим цилиндром.



Черт. 161.

Поместив центр сферы в начале координат, строим на радиусе (черт. 161), совпадающем с осью X, как на диаметре, окружность C в плоскости XY и на ней цилиндрическую поверхность. Получаем цилиндроид, ограниченный сверху поверхностью сферы. Легко видеть, что объем его дается интегралом (1).

§ 169. Заключение.

1. Если подъинтервалы Δx бесконечно малы и a' и b' бесконечно мало отличаются от a и b, то

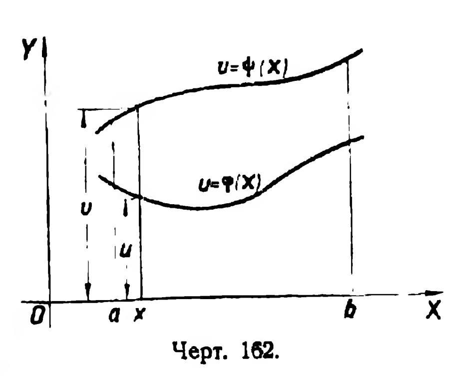
$$\sum_{a'}^{b'} f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,$$

где ε бесконечно мало.

2. Двойной интеграл вычисляется:

если площадь интеграции первого типа, — по формуле:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{\int_{u=\varphi(x)}^{v=\psi(x)} f(x, y)\,dy\right\} dx;$$



Черт. 162.

если площадь второго типа, — то по формуле:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left\{\int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\,dx\right\} dy;$$

для замкнутого контура

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left\{ \int_{u=\varphi(x)}^{v=\psi(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy.$$

Черт. 163.

Черт. 164.

Черт. 165.

Черт. 166.

В полярных координатах в зависимости от типа площади имеем:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int_{r_0}^{R} \left\{ \int_{\alpha=\varphi(r)}^{\beta=\psi(r)} f(r\cos\omega, r\sin\omega)\, r\, d\omega \right\} dr;$$

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_{\rho_1=\lambda(\omega)}^{\rho_2=\mu(\omega)} f(r\cos\omega, r\sin\omega)\, r\, dr \right\} d\omega.$$

ПОВЕРХНОСТЬ. СФЕРА.

До сих пор для вычисления площадей поверхностей мы имеем формулу только для поверхности вращения. Понятие двойного интеграла позволяет вывести соответствующую формулу и для площади поверхности любой формы.

§ 170. Площадь поверхности произвольной формы.

Пусть данная поверхность отнесена к некоторой системе декартовых прямоугольных координат. Если она хотя бы некоторыми прямыми, параллельными оси Z, пересекается в нескольких точках, то разделим ее на части, каждая из которых всякой прямой, параллельной оси Z, пересекалась бы только в одной точке, и будем рассматривать одну такую часть, которую и будем называть данной поверхностью. Для нее апликата z будет однозначной непрерывной функцией абсциссы x и ординаты y. Пусть

$$z = f(x, y).$$

Мы предположим, что частные производные

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{1}$$

тоже непрерывны.

Обозначим через γ угол между осью Z и нормалью MN к поверхности в произвольной точке M. Положительное направление этой нормали выберем так, чтобы угол γ был острый (черт. 168). Как известно из диференциальной геометрии,

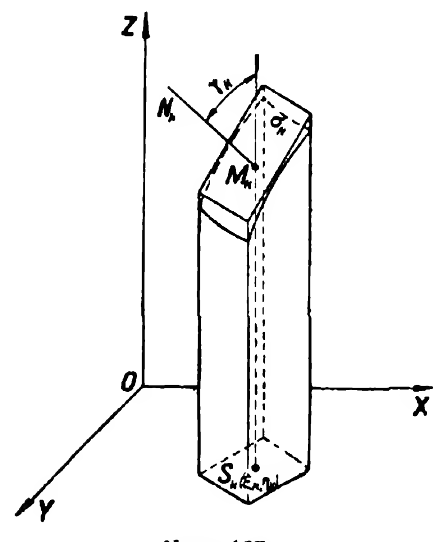
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{2}$$

Так как p и q — функции x и y, то $\cos\gamma$ — тоже некоторая вполне определенная функция тех же переменных. Пусть

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \varphi(x, y), \quad \cos\gamma = \frac{1}{\varphi(x, y)}. \tag{3}$$

Проведем на плоскости XY непересекающийся с самим собой замкнутый контур C (черт. 168) и построим на нем цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Z. Тот контур, в котором она пересечет данную поверхность, обозначим через C'; площадь поверхности, ограниченную этим контуром C', обозначим через S.

Прежде чем выводить формулу для вычисления площади S, необходимо было бы точно определить, что мы будем разуметь под площадью кривой поверхности. Но это определение мы введем в процессе вывода самой формулы.



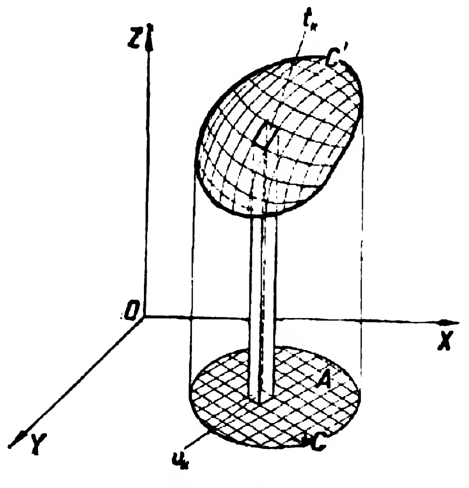
Черт. 167.

Разобьем площадь A, ограниченную на плоскости XY контуром C, на элементарные площадки $u_1, u_2, \ldots, u_n$ безразлично какой формы. На контуре каждой из них построим цилиндрическую поверхность, перпендикулярную к плоскости XY. Получим систему элементарных цилиндрических трубок. Каждая из них, пересекаясь с поверхностью S, вырежет из нее соответствующий кусок. Через t_k обозначим тот кусок поверхности, который вырезается из нее трубкой, стоящей над площадкой u_k. На каждом таком куске t_k отметим тоже совершенно произвольно точку M_k, проекция которой на плоскость XY пусть будет точка s_k с координатами ξ_k, η_k. Так как точка M_k взята на куске t_k, то очевидно, что точка s_k лежит на площадке u_k (черт. 167).

Пусть $M_k N_k$ — нормаль к поверхности в точке M_k; острый угол ее с осью Z обозначим через γ_k. Согласно (3) имеем:

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\varphi(\xi_k, \eta_k)}. \tag{4}$$

Проведем теперь в точке M_k касательную плоскость. Из нее трубка, стоящая над площадкой u_k, вырежет некоторую часть, которую назовем **черепицей** и площадь которой обозначим через σ_k.



Черт. 168.

Вообразим, что мы сделали такое построение для каждой элементарной трубки. Следовательно, к каждому куску, на которые поверхность разделена трубками, проведена в какой-нибудь его точке касательная плоскость и из нее удержана только та часть, которая вырезается трубкой. В результате мы будем иметь всю поверхность разбитой на куски $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ и каждого куска t_k будет касаться в некоторой его точке черепица σ_k. Вся поверхность будет покрыта такими черепицами.

В нашем представлении чем меньше куски поверхности, тем меньше каждый кусок отличается от покрывающей его черепицы. Поэтому введем такое

***Определение.* Площадью кривой поверхности назовем предел суммы покрывающих ее черепиц в предположении, что число черепиц бесконечно возрастает так, что размеры их бесконечно умаляются.**

Опираясь на это определение, уже нетрудно получить искомую формулу.

Так как площадку u_k можно рассматривать как проекцию черепицы σ_k, то

$$u_k = \sigma_k \cos \gamma_k,$$

откуда согласно (4)

$$\sigma_k = \frac{u_k}{\cos \gamma_k} = \varphi(\xi_k, \eta_k)\, u_k.$$

Поэтому, взяв сумму всех σ_k, получим

$$S = \lim \sum \sigma_k = \lim \sum \varphi(\xi_k, \eta_k)\, u_k.$$

Но в правой части имеем двойной интеграл от функции $\varphi(x, y)$ по площади, ограниченной контуром C:

$$S = \iint \varphi(x, y)\, dx dy = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

***Теорема.* Площадь S поверхности**

$$z = f(x, y),$$

ограниченной контуром, который проектируется на плоскость XY контуром C, определяется по формуле

$$S = \iint_C \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx dy \tag{5}$$

при условии, что сама функция z и ее частные производные

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

непрерывны для всех точек внутри и на контуре C.

Мы предполагали, что для данной поверхности z — однозначная функция x и y. Если бы оказалось, что дан y как непрерывная функция x и z, тогда естественно роль плоскости XY играла бы плоскость XZ. Контур C', ограничивающий поверхность S, мы проектировали бы на плоскость XZ и вместо (5) имели бы

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz, \tag{6}$$

причем интеграл брали бы по части плоскости XZ, ограниченной проекцией на нее контура C'.

Если бы для поверхности была дана абсцисса x как непрерывная функция y и z, то ясно, что

$$S=\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz,$$

где интеграл берется по части плоскости YZ, ограниченной проекцией на нее контура C'.

Полученные формулы для площади кривой поверхности имеют большое теоретическое значение. Но в приложениях даже для простейших поверхностей они обыкновенно приводят к невычисляемым интегралам.

§ 171. Бесконечно малая площадь поверхности.

Сохраняя прежние обозначения, предположим, что на поверхности

$$z=f(x, y)$$

имеем бесконечно малую площадь σ, ограниченную контуром C', проекция которого на плоскость XY дает контур C, ограничивающий площадь u. Попрежнему пусть

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{1}{\varphi(x, y)}. \tag{1}$$

По доказанному

$$\sigma=\iint\limits_u\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\iint\limits_u\varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

По теореме о среднем значении интеграла имеем:

$$\sigma=\varphi(\xi_1, \eta_1)\,u, \tag{2}$$

где (ξ_1, η_1) — координаты некоторой, хотя и неизвестной, но вполне определенной точки s_1 на площадке σ. Пусть s — произвольно взятая точка на той же площадке σ. Через γ и γ_1 обозначим углы с осью Z нормалей к σ в точках s и s_1. Согласно (1)

$$\cos\gamma_1=\frac{1}{\varphi(\xi_1, \eta_1)},$$

а потому равенство (2) можно переписать в форме

$$u=\sigma\cos\gamma_1. \tag{3}$$

Пусть площадка σ бесконечно умаляется так, что контур C' стягивается в одну точку. Ясно, что в таком случае разность $\gamma_1-\gamma$ между углами с осью Z нормалей в точках s и s' тоже будет бесконечно умаляться, а потому будет бесконечно умаляться и разность $\cos\gamma_1-\cos\gamma$.

Заменяя в (3) фактор $\cos\gamma_1$ бесконечно мало отличающимся от него фактором $\cos\gamma$, заключаем, что

$$u\approx\sigma\cos\gamma. \tag{4}$$

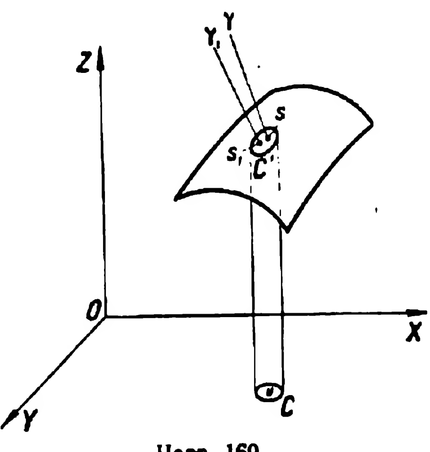
Площадка σ есть часть кривой поверхности. Вообразим на время, что эта площадка есть плоская площадка, помещенная в пространстве так,

что плоскость ее перпендикулярна к нормали в точке s. В таком случае угол γ был бы углом между плоскостью площадки σ и плоскостью XY, а потому проекция на плоскость XY этой площадки, мыслимой как плоская, равнялась бы точно $\sigma \cos\gamma$. Принимая во внимание это и равенство (4), получаем теорему:

При вычислении проекции бесконечно умаляющейся кривой площадки σ всегда можно, с точки зрения эквивалентности, рассматривать бесконечно умаляющуюся площадку как плоскую площадку, перпендикуляром к которой служит нормаль к поверхности в какой-нибудь точке этой площадки.

Вошло в обычай всякую бесконечно умаляющуюся часть поверхности называть элементом поверхности. Следовательно,

с точки зрения эквивалентности всякий бесконечно умаляющийся элемент кривой поверхности можно рассматривать как плоский элемент, плоскость которого совпадает с касательной плоскостью в любой точке рассматриваемого кривого элемента.



Черт. 169.

Это заключение вполне совпадает с нашим интуитивным представлением о поверхности. Всякая очень малая часть кривой поверхности нам представляется кусочком плоскости. Этим результатом очень удобно пользоваться для быстрого вывода формулы для поверхности любого типа. Рассуждаем так: пусть требуется вычислить поверхность S, ограниченную контуром C, проекция которого на плоскость XY есть контур C'. Разбиваем всю поверхность S на элементарные кривые площадки.

Пусть $d\sigma$ — одна из них и пусть γ — угол с осью Z нормали в какой-нибудь ее точке.

Все элементарные кривые площадки проектируем на плоскость XY. Пусть вообще du — проекция площадки $d\sigma$. Очевидно, что эти площадки du покроют всю площадь, ограниченную контуром C'. По доказанному

$$du \approx \cos\gamma \, d\sigma, \quad d\sigma \approx \frac{du}{\cos\gamma}. \tag{5}$$

Но ясно, что S точно равно сумме всех $d\sigma$, а потому

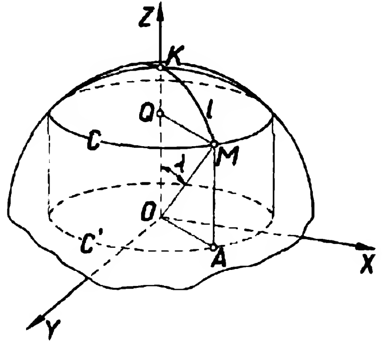
$$S = \lim \sum d\sigma.$$

Заменяя $d\sigma$ из (5) эквивалентной величиной, имеем

$$S = \lim \sum \frac{du}{\cos\gamma} = \iint\limits_{C'} \frac{du}{\cos\gamma} = \iint\limits_{C'} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy.$$

§ 172. Сфера.

Пусть K — точка на данной сфере радиуса a. Через нее и некоторую точку M на сфере проведем плоскость, проходящую через центр сферы. В сечении со сферой эта плоскость даст дугу KM так называемого большого круга. Длину этой дуги обозначим через l. Если λ — угол между радиусами OK и OM из центра к концам дуги, то



Черт. 170.

$$l = a\lambda$$

и при $a = 1$ имеем $l = \lambda$. Следовательно, **если радиус сферы равен единице, то длина любой дуги большого круга равна центральному углу, опирающемуся на нее.**

Так как на сфере роль прямых линий играют дуги больших кругов, то за расстояние на ней между двумя ее точками принимают длину дуги большого круга, соединяющей эти точки.

Пусть на сфере радиуса a описана около точки K окружность C дугой $KM = l$. Длину окружности обозначим через s, площадь сферы, ограниченную ею, — через u. Вычислим ее.

Начало координат поместим в центре, направив ось Z через K. Пусть C' и A—проекции на плоскость XY окружности C и точки M. Уравнение сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

откуда для верхней половины

$$z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

а потому

$$u = \iint\limits_{C'} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = \iint\limits_{C'} \frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

где интеграл берется по площади, ограниченной окружностью C', радиус которой $OA = a \sin\lambda = a \sin\frac{l}{a}$. Переходя к полярным координатам, получим:

$$u = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{OA} \frac{ar\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right\} d\omega = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \Big/_{\!0}^{a\sin\lambda} - a\sqrt{a^2 - r^2} \right\} d\omega,$$

и окончательно

$$u = 2\pi a^2 (1 - \cos\lambda), \quad \lambda = \frac{l}{a}. \tag{1}$$

Если из M опустим перпендикуляр MQ на ось Z, то он будет служить обыкновенным радиусом для окружности C, а потому для ее длины имеем:

$$s = 2\pi MQ = 2\pi a \sin\lambda. \tag{2}$$

Проведем из точки K два сферических радиуса KM и KM', т. е. две дуги большого круга к точкам M и M' окружности C. Фигуру KMM' (черт. 171) назовем сферическим сектором; пусть u'—его площадь. Если α —угол между дугами KM и KM', то ясно, что

$$\frac{u'}{u}=\frac{\alpha}{2\pi},$$

а потому из (1) следует, что

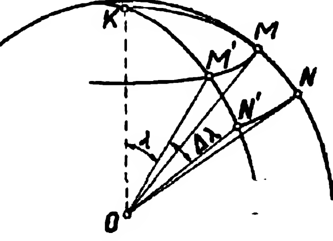
$$u'=\alpha a^2(1-\cos\lambda). \tag{3}$$

Также согласно (2) нетрудно видеть, что

$$\text{дуга } MM'=\alpha a\sin\lambda. \tag{4}$$

Дадим углу λ приращение $\Delta\lambda$. Тогда пусть точки M и M' передвинутся в N и N'. Вместо сектора MKM' мы получим сектор NKN'. Площадь его найдем, заменив в (3) λ через $\lambda+\Delta\lambda$. Для дальнейшего нам очень важно найти площадь фигуры $MNM'N'$, которую будем называть ***кривым сферическим четырехугольником***. Очевидно, что она равна приращению $\Delta u'$, которое испытывает площадь сектора u', когда λ получает приращение $\Delta\lambda$. Обозначим правую часть (3) через $f(\lambda)$. Тогда

$$\Delta u'=f(\lambda+\Delta\lambda)-f(\lambda).$$



Черт. 171.

Пусть $\Delta\lambda$ бесконечно мало. Мы знаем, что бесконечно малое приращение функции эквивалентно диференциалу функции, а потому из (3) следует

$$\Delta u'\approx \alpha a^2\sin\lambda\Delta\lambda. \tag{5}$$

Правая часть поддается замечательному истолкованию. Вычислим длины дуг MM' и MN. Согласно (4)

$$MM'=\alpha a\sin\lambda,$$

и нетрудно видеть, что

$$MN=a\Delta\lambda.$$

Теперь ясно, что

$$\Delta u'\approx MM'\cdot MN. \tag{6}$$

***Теорема.* С точки зрения эквивалентности площадь бесконечно малого кривого сферического четырехугольника можно рассматривать как площадь плоского прямоугольника.**

Этим результатом мы скоро воспользуемся в теории тройных интегралов.

§ 173. Заключение.

1. Площадь поверхности любой формы определяется по формуле:

$$S=\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

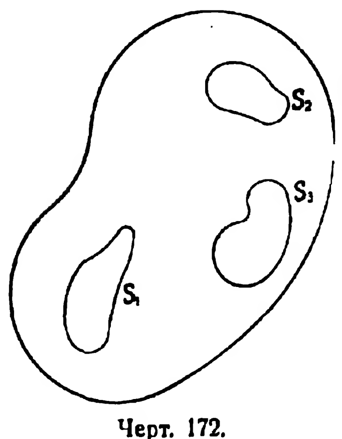
2. Площадь бесконечно малого кривого сферического четырехугольника эквивалентна произведению двух его смежных сторон.

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ.

Понятие тройного интеграла естественно появляется, если к функциям трех переменных применить те же идеи, которые приводят к понятиям простого и двойного интеграла.

§ 174. Определение тройного интеграла.

Пусть внутри замкнутой поверхности S лежит несколько поверхностей S_1, S_2, S_3, ... тоже замкнутых (черт. 172). Часть пространства, лежащую внутри S и вне поверхностей S_1, S_2, S_3, ..., будем называть объемом. Хордой объема назовем всякий отрезок, соединяющий любые две точки, лежащие на поверхностях, ограничивающих объем.



Черт. 172.

Размером, или диаметром, объема называют длину наибольшей хорды, которую можно провести между двумя точками поверхностей, ограничивающих объем.

Размер, например, параллелепипеда есть длина его наибольшей диагонали. Размер эллипсоида — длина его наибольшей оси.

Пусть $f(x, y, z)$ — функция, непрерывная во всех точках, лежащих внутри или на поверхности некоторого объема V *).

Разделим этот объем на достаточно малые части произвольной формы, которые назовем *элементарными объемами*, или даже просто *элементами*. Перенумеровав их в каком угодно порядке, обозначим их символами v_1, v_2, v_3, ..., v_n. Внутри или на поверхности каждого элемента v_k выбираем совершенно произвольную точку с координатами ξ_k, η_k, ζ_k и помножаем значение функции в этой точке на самый объем v_k. Получим произведение

$$f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k.$$

*) Функция может быть непрерывна внутри замкнутой поверхности и прерывна на ней. Так, например, если Σ — поверхность сферы

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

то функция

$$f(x, y, z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2-a^2}$$

непрерывна внутри сферы и обращается в бесконечность на ее поверхности.

Составив подобные произведения для каждого элементарного объема, обозначим через s сумму всех полученных таким образом произведений:

$$s=f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)v_1+f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)v_2+f(\xi_3, \eta_3, \zeta_3)v_3+\ldots+f(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)v_n,$$

или короче

$$s=\sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)v_k.$$

Если же символом dv мы обозначим общий тип элементарного объема, называемого также диференциальным объемом, то сумму s мы можем представить в таком виде:

$$s=\sum f(x, y, z)\,dv,$$

где под x, y, z мы должны разуметь координаты какой-нибудь точки, лежащей внутри рассматриваемого объема dv.

Вообразим теперь бесконечный процесс, заключающийся в том, что от одного деления тела на элементы мы переходим к следующему делению так, что размеры всех элементов бесконечно умаляются. В таком случае сумма s становится суммой бесконечно умаляющихся слагаемых в бесконечно возрастающем числе, т. е. становится интегральной суммой. Предел ее называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$, распространенным на данный объем, и обозначается или так:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv,$$

или короче так:

$$\int\limits_V f(x, y, z)\,dv,$$

где вместо символа dv может быть поставлен всякий иной символ, избранный для обозначения типа элементарного объема. Внизу знака интеграла часто приписывают символы, которые должны указывать на тот объем, по которому берется интеграл.

Следовательно,

тройным интегралом от данной непрерывной функции, распространенным по данному объему, называется предел суммы всех произведений, получаемых от умножения каждого элементарного объема на значение функции в какой-нибудь точке этого объема:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv=\lim\sum f(x, y, z)\,dv.$$

Рассматривая сумму

$$s=\sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)v_k,$$

мы видим, что слагаемые ее зависят от того, на какие элементарные объемы мы разделим данное тело и как произведем выбор точки в каждом объеме. Возникает вопрос: не будет ли предел суммы s зависеть как от формы элементарных объемов, так и от выбора точек в них?

Ясно, что в сумме s множители v_k есть то, что мы называем элементами интеграции, а множители $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$—факторы при них.

Если внутри объема v_k вместо точки (ξ_k, η_k, ζ_k) мы выберем другую точку $(\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k)$, то сумма s получит новое значение:

$$s'=\sum f(\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k)v_k.$$

Но так как точки (ξ_k, η_k, ζ_k) и $(\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k)$ лежат внутри одного и того же элементарного объема и так как размеры элементарных объемов бесконечно малы, то все разности

$$f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) - f(\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k)$$

тоже бесконечно малы. Следовательно, факторы сумм s и s' отличаются друг от друга бесконечно мало, а потому по второму принципу

$$\lim s = \lim s'.$$

Так мы убеждаемся, что предел суммы s, т. е. значение тройного интеграла, не зависит от выбора точек внутри элементарных объемов.

Труднее доказать, что предел суммы s не зависит также от формы элементарных объемов. Мы примем это пока без доказательства. Оправданием такого допущения может в известной степени служить то механическое толкование тройного интеграла, которое мы сейчас рассмотрим.

§ 175. Геометрическое значение тройного интеграла.

Тройной интеграл имеет простое геометрическое значение в том случае, когда подъинтегральная функция равна единице. В самом деле, если в основном равенстве

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k$$

примем функцию $f(x, y, z)$ тожественно равной единице, то имеем

$$\iiint\limits_V dv = \lim \sum v_k.$$

Но сумма всех элементарных объемов, очевидно, равна данному объему V, а потому

$$\iiint\limits_V dv = V,$$

и мы получаем теорему: **тройной интеграл от функции, равной единице, равен объему того тела, по которому он распространен.**

Но в общем случае, когда подъинтегральная функция не равна единице, тройной интеграл не имеет геометрического значения, так как его не имеет и функция трех переменных.

§ 176. Механические приложения тройного интеграла.

Пусть имеем неоднородное тело. Возьмем внутри него какую-нибудь точку p и мысленно выделим из тела достаточно малый объем v так, чтобы точка p была внутри него. Подобным образом расположенный объем будем называть объемом около точки p.

Если m — масса, заключенная внутри объема v, то **отношение**

$$\frac{m}{v},$$

т. е. отношение массы вещества к тому объему, в котором она заключена, называется средней плотностью вещества в рассматриваемом объеме.

Если мы будем брать различные объемы около точки p, то в общем случае мы будем получать различные средние плотности.

Вообразим, что объем v изменяется, бесконечно умаляясь так, что в пределе обращается в точку p. Для простоты можем вообразить, что объем v есть шар с центром в p и что радиус этого шара бесконечно умаляется.

Тот предел, к которому стремится средняя плотность

$$\frac{m}{v}$$

бесконечно умаляющегося объема v, построенного около точки p, называется плотностью тела в точке p.

Следовательно, если

$$\lim_{v \to 0} \frac{m}{v} = \rho, \tag{1}$$

то ρ — плотность тела.

Предположим теперь, что v — бесконечно малый объем, т. е. объем, который вводится как вспомогательная величина и который только в будущем в окончательной формуле будет предположен бесконечно умаляющимся. Обозначив через ε разность между средней и истинной плотностью, получим равенство

$$\frac{m}{v} = \rho + \varepsilon, \tag{2}$$

где ε бесконечно умаляется одновременно с v. Следовательно, если v — бесконечно малый объем, то и ε бесконечно мало. Имеем

$$m = \rho v + \varepsilon v. \tag{3}$$

Черт. 173.

В правой части оба слагаемых бесконечно малы, но порядок малости второго выше порядка первого, а потому

$$m \approx \rho v. \tag{4}$$

К тому же заключению можно притти и так: из (3) имеем

$$\frac{m}{\rho v} = 1 + \frac{\varepsilon}{\rho},$$

откуда

$$\lim_{v \to 0} \frac{m}{\rho v} = 1,$$

а потому (4). Получаем теорему:

Масса вещества, заключенного в бесконечно малом объеме, эквивалентна произведению плотности в любой точке объема на объем:

$$m \approx \rho v. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь такую задачу: вычислить массу неоднородного тела, зная его плотность ρ в каждой точке.

Очевидно, что ρ есть некоторая функция координат точки. Пусть

$$\rho = f(x, y, z).$$

Делим тело на элементарные объемы

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$$

и пусть m_k — масса вещества в объеме v_k. Если ρ_k — плотность в какой-нибудь точке (ξ_k, η_k, ζ_k) этого объема, то, как мы видели,

$$m_k \approx \rho_k v_k \approx f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k. \tag{6}$$

Если теперь M — масса всего тела, то

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = \sum m_k,$$

и это равенство, справедливое при всяком делении на элементарные объемы, будет справедливо и в пределе:

$$M = \lim \sum m_k.$$

Заменяя же каждое бесконечно малое m_k эквивалентной ему величиной, получаем:

$$M = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k = \lim \sum f(x, y, z)\, dv.$$

Но по определению правая часть есть тройной интеграл, а потому

***Теорема.* Масса, заключенная в объеме, выражается тройным интегралом, распространенным на объем, а именно**

$$M = \iiint f(x, y, z)\, dv,$$

где $f(x, y, z)$ — плотность тела в точке (x, y, z).

Какова бы ни была данная функция $f(x, y, z)$, мы всегда можем вообразить себе тело, плотность которого в каждой точке равна значению данной функции в этой точке:

$$\rho = f(x, y, z).$$

Следовательно, всякий тройной интеграл с механической точки зрения всегда можно рассматривать как массу некоторого тела.

Так как масса тела не зависит от того, на какие элементарные объемы мы будем делить тело, чтобы образовать интегральную сумму

$$\sum \rho_k v_k = \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k,$$

то мы получаем доказательство, что предел интегральной суммы не зависит от способа деления тела на элементы.

Рассмотрим также следующую задачу: найти координаты центра тяжести тела, зная плотность тела в каждой его точке.

Сохраняя прежние обозначения, мы в каждом объеме v_k выбираем произвольно точку q_k с координатами ξ_k, η_k, ζ_k и заменяем каждый элементарный объем v_k массы m_k одной материальной точкой той же массы m_k, сосредоточенной в точке q_k. Тогда получим систему мате-

риальных точек $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$. Центр тяжести этой системы изолированных точек определится по формулам:

$$
\begin{aligned}
Mx_c &= m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \ldots + m_n\xi_n = \sum m_k\xi_k,\\
My_c &= m_1\eta_1 + m_2\eta_2 + \ldots + m_n\eta_n = \sum m_k\eta_k,\\
Mz_c &= m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 + \ldots + m_n\zeta_n = \sum m_k\zeta_k.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Переходим к пределу, предполагая, что все v_k бесконечно умаляются. Те пределы, к которым при этом стремятся x_c, y_c, z_c, примем за координаты центра тяжести данного тела. Пусть

$$\xi = \lim x_c, \quad \eta = \lim y_c, \quad \zeta = \lim z_c. \tag{8}$$

Из (7) следует, что

$$M\xi = \lim \sum m_k\xi_k, \quad M\eta = \lim \sum m_k\eta_k, \quad M\zeta = \lim \sum m_k\zeta_k. \tag{9}$$

Пусть ρ_k — плотность в точке $q_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$:

$$\rho_k = f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k). \tag{10}$$

Так как

$$m_k \approx \rho_k v_k, \tag{11}$$

то, заменяя в (9) каждый элемент интеграции m_k эквивалентной ему величиной $\rho_k v_k$, получаем

$$M\xi = \lim \sum \rho_k\xi_k v_k = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\xi_k v_k,$$

и, следовательно,

$$M\xi = \iiint f(x, y, z)\,x\,dv = \iiint \rho x\,dv.$$

Аналогичные формулы, очевидно, имеем и для остальных координат η и ζ, а потому

Теорема. **Координаты ξ, η, ζ центра тяжести сплошного тела и его масса M определяются по формулам**

$$M = \iiint \rho\,dv,$$

$$M\xi = \iiint \rho x\,dv, \quad M\eta = \iiint \rho y\,dv, \quad M\zeta = \iiint \rho z\,dv,$$

где $\rho = f(x, y, z)$ — плотность тела.

Видим, что вычисления центра тяжести тоже приводятся к интегралам от функций трех переменных.

§ 177. Элементарные параллелепипеды.

Пока мы предполагали, что элементарные объемы, на которые мы делили наше тело, были произвольной формы. Их выгодно выбрать следующим образом.

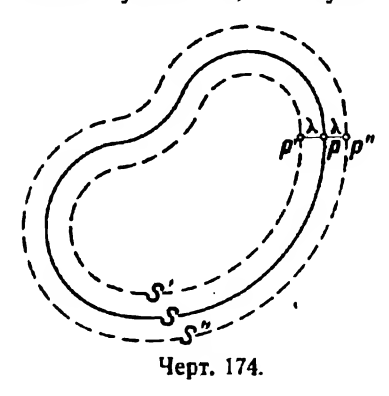
Установив в пространстве прямоугольную систему декартовых осей координат, проведем систему достаточно близких друг к другу плоскостей, перпендикулярных к оси X. Этими плоскостями наше тело разделится на части, которые мы будем называть слоями тела.

Вторую систему плоскостей проводим перпендикулярно к оси Y. Этой системой каждый слой тела разрежется на части, которые мы будем называть столбиками.

Наконец, проводим третью систему плоскостей, перпендикулярных к оси Z. Этими плоскостями каждый столбик разрежется на элементарные параллелепипеды.

Итак, тремя системами плоскостей, перпендикулярных к осям координат, мы разделяем пространство, а вместе с тем и наше тело на элементарные параллелепипеды, которые распадаются на три класса: на внутренние, внешние и граничные, причем граничным параллелепипедом мы называем всякий параллелепипед, который имеет хоть одну общую точку с поверхностью объема.

Докажем, что если размеры элементарных параллелепипедов будут бесконечно умаляться, то сумма граничных параллелепипедов в пределе обращается в нуль. Для простоты предположим, что тело ограничено только одной поверхностью S. Как увидим, доказательство не зависит от числа поверхностей, служащих границами тела.



Черт. 174.

Пусть λ—наибольший из размеров элементарных параллелепипедов. Воображаем, что во всякой точке P данной поверхности S построена нормаль, на которой откладываем по ту и другую сторону от p отрезки pp' и pp'', длиной равные λ. Если такое построение мы сделаем для каждой точки p поверхности S, то ясно, что точки p'' в своей совокупности дадут некоторую поверхность S'', внутри которой будет заключена данная поверхность S; точки же p' дадут некоторую поверхность S', лежащую внутри S. Пусть τ — объем той части пространства, которая заключена между поверхностями S' и S''. Эта часть пространства имеет вид слоя, за толщину которого мы примем величину 2λ.

Геометрически ясно, что все граничные параллелепипеды, сумму которых обозначим через g, лежат внутри слоя τ, а потому

$$g \leqq \tau.$$

Если же заставим величину λ бесконечно умаляться, то очевидно, что

$$\lim \tau = 0.$$

Следовательно, и $\lim g = 0$, а потому

***Теорема*. Сумма всех граничных элементарных параллелепипедов в пределе равна нулю.**

Опираясь на эту теорему, легко доказать, что при вычислении тройного интеграла как предела суммы можно пренебрегать граничными параллелепипедами. В самом деле, составим сумму s.

Обозначим через v_k общий тип внутреннего элементарного параллелепипеда, а через v'_h — общий тип тех частей граничных параллелепипедов, которые лежат внутри поверхности S. Каждый v_k дает для суммы S слагаемое типа:

$$f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k.$$

Каждая же часть v'_h дает слагаемое типа:

$$f(\xi_h, \eta_h, \zeta_h)\, v'_h,$$

а потому

$$s = \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k + s', \tag{1}$$

где

$$s' = \sum_{\text{гран.}} f(\xi_h, \eta_h, \zeta_h)\, v'_h. \tag{2}$$

Пусть M — наибольшее значение модуля функции в рассматриваемой области. Следовательно, при всяком x, y, z

$$|f(x, y, z)| \leqq M,$$

а потому из (2)

$$s' \leqq M \sum v'_h.$$

Так как в пределе сумма всех граничных параллелепипедов, тем более частей их, равна нулю, то

$$\lim s' = 0,$$

и из (1) следует, что

$$\lim s = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k.$$

***Теорема*. При вычислении тройного интеграла как предела суммы граничными параллелепипедами можно пренебрегать.**

Следовательно, в дальнейшем мы можем на граничные параллелепипеды не обращать никакого особого внимания.

§ 178. Обозначение тройного интеграла.

При обозначении тройного интеграла пользуются различными системами. Прежде всего пишут, смотря по личной склонности, то один знак интеграла, то три.

Далее, подъинтегральное выражение всегда должно изображать общий тип слагаемых, входящих в интегральную сумму. С этой целью берут какую-нибудь букву, например v, и символом Δv или чаще символом dv обозначают общий тип элементарного объема. Ввиду внешнего сходства такого обозначения с обозначением диференциалов величин элементарный объем часто называют диференциальным объемом, или диференциальным элементом пространства. Но необходимо помнить, что на символ dv в данном случае надо смотреть как на нечто одно целое, где d и v в отдельности не имеют самостоятельного значения.

В конце концов тройной интеграл обозначается одним из следующих двух символов:

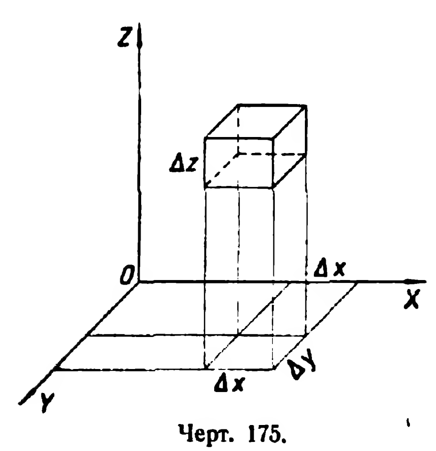
$$\int f(x, y, z)\, dv, \quad \iiint f(x, y, z)\, dv,$$

где вместо буквы v каждый по своему желанию может поставить другую букву. Большим предпочтением в этом случае пользуются буквы τ, σ, а также O. Поэтому часто встречаются такие обозначения:

$$\int f(x, y, z)\, d\tau, \quad \int f(x, y, z)\, d\sigma, \quad \int f(x, y, z)\, dO$$

и им подобные. Внизу интеграла иногда приписывают символ, указывающий на тот объем, по которому берется интеграл. Но очень часто его не пишут, а только держат в уме.

Деление тела на элементарные параллелепипеды привело еще к одному обозначению, которое очень удобно и которым поэтому наиболее часто пользуются.



Черт. 175.

Разделим тело на параллелепипеды тремя системами плоскостей, перпендикулярных к осям координат. Пусть Δx — общий символ расстояния между двумя соседними плоскостями, перпендикулярными к оси X; через Δy обозначим расстояние между двумя какими-нибудь соседними плоскостями, перпендикулярными к оси Y; наконец, Δz пусть будет общий символ расстояния между двумя произвольно взятыми соседними плоскостями, перпендикулярными к оси Z. В таком случае ясно, что объем всякого элементарного параллелепипеда представится произведением типа $\Delta x \Delta y \Delta z$, а потому слагаемые суммы S будут типа $f(x, y, z)\Delta x \Delta y \Delta z$. Поэтому мы можем написать равенство:

$$S = \sum f(x, y, z)\, \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Такое изображение суммы S повело к следующему обозначению тройного интеграла:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Это обозначение очень удобно, так как оно хорошо напоминает происхождение тройного интеграла. Мы имеем основное равенство:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim \sum f(x, y, z)\, \Delta x \Delta y \Delta z.$$

§ 179. Основные теоремы о тройном интеграле.

Обозначаем символами $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ элементарные объемы; ξ_k, η_k, ζ_k — координаты точки, выбранной внутри объема v_k.

***Теорема.* Постоянный множитель можно вносить под знак интеграла, а следовательно, и выносить из под знака интеграла:**

$$\iiint A f(x, y, z)\, dv = A \iiint f(x, y, z)\, dv.$$

Доказательство. Имеем равенство:

$$\sum A f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k = A \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k.$$

Переходя к пределу, получаем теорему.

***Теорема.* Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых:**

$$\iiint \{\varphi(x, y, z) \pm \psi(x, y, z)\}\, dv = \iiint \varphi\, dv \pm \iiint \psi\, dv.$$

Доказательство. Имеем:

$$\sum \{\varphi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \pm \psi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\} v_k = \\ = \sum \varphi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k \pm \sum \psi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k.$$

Переходя к пределу, получим теорему.

***Теорема.* Интеграл по всему объему равен сумме интегралов по всем тем частям, на которые разделен данный объем; следовательно, если данный объем V разделен на две части V_1 и V_2, то**

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dv = \iiint_{V_1} f(x, y, z)\,dv + \iiint_{V_2} f(x, y, z)\,dv.$$

Доказательство. Разделив данный объем V на элементарные объемы, мы слагаемые суммы

$$\sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k$$

разделим на две группы. В одну соединяем те, которые составлены с помощью только элементарных объемов, принадлежащих части V_1; слагаемые, составленные с помощью элементарных объемов, принадлежащих к части V_2, дадут другую группу. Имеем равенство

$$\sum_V f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k = \sum_{V_1} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k + \sum_{V_2} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k.$$

Переходя к пределу, получим теорему.

§ 180. Заключение.

1. Тройным интегралом от непрерывной функции, распространенным на данный объем, называется предел суммы всех произведений каждого бесконечно умаляющегося элементарного объема на значение функции в какой-нибудь его точке:

$$\iiint f(x, y, z)\,dv = \lim \sum f(x, y, z)\,\Delta v.$$

Теоремы:

1) $\int Af(x, y, z)\,dv = A\int f(x, y, z)\,dv;$

2) $\int (\varphi \pm \psi)\,dv = \int \varphi\,dv \pm \int \psi\,dv;$

3) $\int\limits_{V_1+V_2} f\,dv = \int\limits_{V_1} f\,dv + \int\limits_{V_2} f\,dv;$

4) $\int\limits_V dv = V.$

Масса и центр тяжести определяются формулами

$$M = \int \rho\,dv,$$

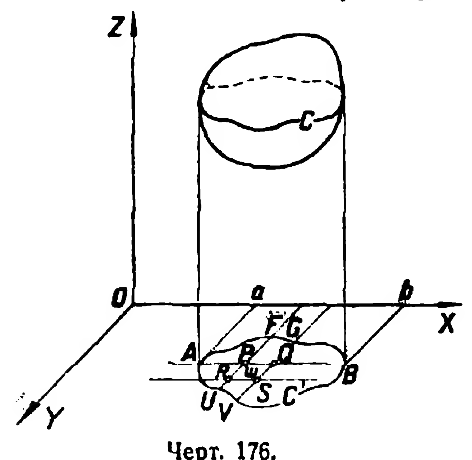
$$M\xi = \int \rho x\,dv, \quad M\eta = \int \rho y\,dv, \quad M\zeta = \int \rho z\,dv.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА.

Тройной интеграл может быть вычислен весьма разнообразными способами в зависимости от того, по какому закону мы данный объем разбиваем на элементарные объемы и как мы их потом соединяем в начальный объем.

§ 181. Вычисление интеграла в декартовых координатах.

Пусть V — объем, ограниченный только одной замкнутой поверхностью S, относительно которой предположим, что она всякой прямой, параллельной оси Z, пересекается только в двух точках. Если это условие не соблюдено, то предварительно разделим данное тело на *такие части, для каждой из* которых удовлетворялось бы это условие.



Черт. 176.

Пусть L — прямая, перпендикулярная к плоскости XY и расположенная вне поверхности S. Мысленно придвигаем ее к поверхности S, пока она не коснется *этой поверхности, и потом* обводим ее около поверхности так, чтобы она все время касалась поверхности и оставалась перпендикулярной к плоскости XY. Получим цилиндрическую поверхность, которую обозначим через H. Она касается поверхности S, а ее образующие параллельны оси Z. Поэтому поверхность H описана около S, а S вписана в нее.

Пусть C — линия, по которой касаются H и S. Ее проекцию на плоскость XY обозначим через C'. Очевидно, что H пересекается с плоскостью XY как раз по C'.

Мы предположим, что всякая прямая, параллельная оси Y, на плоскости XY пересекает контур C' только в двух точках. Если это условие не *соблюдено, то мы предварительно разделим данное тело на* такие части, для каждой из которых это условие соблюдалось бы.

Пусть, наконец, aA и bB — крайние ординаты контура C'. Площадь, ограниченную этим контуром, обозначим через A. Точками A и B контур C' делится на две части.

Ординату части AFB обозначим через η_1, ординату части AUB — через η_2. Пусть

$$\eta_1 = \lambda(x), \quad \eta_2 = \mu(x). \tag{1}$$

Контуром C поверхность S делится на две части: на нижнюю S_1 и верхнюю S_2. Апликату первой обозначим через ζ_1, апликату второй через ζ_2. Пусть

$$\zeta_1 = \varphi(x, y), \quad \zeta_2 = \psi(x, y).$$

Воображаем теперь, что тремя системами плоскостей, перпендикулярных к осям, наше тело разделено на элементарные параллелепипеды.

Плоскости, перпендикулярные к оси X, деля тело на слои, разделят площадь A на полосы. Пусть $FGUV$ — одна из таких полос. Над нею расположен соответствующий ей слой тела.

Плоскости, перпендикулярные к оси Y, деля слои на столбики, разделят площадь A на прямоугольники.

Пусть $PQRS$ — один из таких прямоугольников; назовем его прямоугольником w. Над ним расположен соответствующий ему столбик.

Координаты точки P пусть будут x и y.

Все столбики плоскостями, перпендикулярными к оси Z, делятся на элементарные параллелепипеды.

Таким образом, сначала тело делится на слои, потом слои на столбики и, наконец, столбики на элементарные параллелепипеды. Обратно, элементарные параллелепипеды группируются в столбики, столбики в слои, слои же в тело.

Рассмотрим теперь сумму

$$s = \sum f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z. \tag{2}$$

Соединяем ее слагаемые в отдельные группы, относя в одну группу все те слагаемые, которые принадлежат параллелепипедам, лежащим в одном и том же столбике. Такую группировку мы будем называть суммированием по столбику или вдоль столбика.

Через s_w обозначим сумму всех тех слагаемых, которые составлены с помощью параллелепипедов, принадлежащих одному и тому же столбику, стоящему над прямоугольником w, что запишем так:

$$s_w = \sum_w f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Во всех слагаемых этой суммы Δx и Δy одни и те же; так же одни и те же x и y. Значения же z различны и они заключены в пределах:

$$\zeta_1 = \varphi(x, y), \quad \zeta_2 = \psi(x, y),$$

где x и y имеют значения, равные координатам точки P.

Поэтому мы запишем так:

$$s_w = \left\{\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right\} \Delta x\,\Delta y, \tag{3}$$

выносия $\Delta x\,\Delta y$ общим множителем.

Складываем теперь все суммы s_w, относящиеся к одной и той же какой-нибудь полоске $FGUV$. Мы будем говорить, что суммируем вдоль слоя, или вдоль полоски, или параллельно плоскости YZ.

При этом суммировании во всех суммах s_w как x так и Δx будут оставаться одни и те же, но y будет меняться от η_1 до η_2. Поэтому согласно (3) результат суммирования вдоль слоя можно представить так:

$$\sum s_w = \left\{ \sum_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z) \Delta z \right] \Delta y \right\} \Delta x, \tag{4}$$

вынося Δx общим множителем.

Теперь остается сложить все суммы, относящиеся к различным слоям. При этом x меняется от a до b, а потому

$$s = \sum_a^b \left\{ \sum_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z) \Delta z \right] \Delta y \right\} \Delta x.$$

Переходим к пределу. Имеем:

$$\lim s = \lim \sum_a^b \left\{ \lim \sum_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\lim \sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z) \Delta z \right] \Delta y \right\} \Delta x =$$

$$= \lim \sum_a^b \left\{ \lim \sum_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\int_{\zeta_1 = \varphi(x, y)}^{\zeta_2 = \psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx.$$

Во внутренних скобках, когда мы проинтегрируем данную функцию по z, мы получим функцию только x и y. Поэтому

$$\lim s = \sum_a^b \left[\int_{\eta_1 = \lambda(x)}^{\eta_2 = \mu(x)} \left(\int_{\zeta_1 = \varphi(x, y)}^{\zeta_2 = \psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right] dx.$$

В квадратных скобках стоит уже функция только одного x, а потому окончательно:

$$\lim s = \int_a^b \left[\int_{\eta_1}^{\eta_2} \left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right] dx. \tag{5}$$

Но левая часть есть тройной интеграл. Мы видим, что *он выразился* через три последовательных простых интеграла.

Повторим вкратце предыдущее рассуждение. Группируя слагаемые сначала по столбикам, потом вдоль слоев и, наконец, вдоль оси X, мы *имеем равенство*:

$$\sum f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z = \sum_a^b \left\{ \sum_{\eta_1}^{\eta_2} \left(\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z) \Delta z \right) \Delta y \right\} \Delta x.$$

В пределе каждая сумма обращается в соответствующий интеграл, а потому

***Теорема.* Тройной интеграл может быть получен троекратным простым интегрированием данной функции сначала по одному переменному, затем по другому и, наконец, по третьему:**

$$\iiint f(x, y, z)\, de = \int_a^b \left\{ \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx, \tag{6}$$

причем пределы ζ_1 и ζ_2 первого интеграла суть функции двух остальных переменных; пределы η_1 и η_2 второго интеграла — функции последнего переменного; пределы третьего интеграла — постоянные величины.

При применении на практике полученной формулы надо помнить, что каждое интегрирование соответствует суммированию или по столбикам, или по слоям. Поэтому когда мы производим первое интегрирование по z, то мы на плоскости XY в произвольной точке (x, y) восставляем перпендикуляр, который должен изображать столбик, и смотрим, если итти по перпендикуляру внутри тела, то в каких пределах меняется z. Эти пределы будут пределами интеграла по z. Они являются функциями x и y.

Затем мы должны собрать все столбики, принадлежащие одному и тому же слою. *Для этого, оставляя x постоянным, изменяем y и находим* те пределы, в которых он изменяется, пока перпендикуляр в точке (x, y), перемещаясь параллельно плоскости YZ, пересекает тело. Эти пределы, будучи функциями x, служат пределами интеграла по y.

Наконец, предел интеграла по x найдем, рассматривая крайние значения x для точек данной поверхности S.

Для вычисления тройного интеграла мы получили формулу, в которой интегрирование производится сначала по z, потом по y и, наконец, по x.

Этот порядок получился, очевидно, потому, что мы сначала собирали слагаемые по вертикальным столбикам, затем по слоям, параллельным *плоскости YZ, и, наконец, суммировали вдоль оси X.*

Но группировать слагаемые можно и в ином порядке. Мы могли бы сначала суммировать по столбикам, перпендикулярным плоскости YZ, затем по слоям, параллельным плоскости XY, и, наконец, вдоль оси Z.

Тогда мы первое интегрирование получили бы по x, второе по y, третье по z.

Поэтому очевидно следующее общее заключение:

Чтобы получить тройной интеграл, надо подынтегральную функцию проинтегрировать по каждому переменному все равно в каком порядке.

Но при этом надо всегда обращать самое тщательное внимание на пределы *каждого интегрирования. С изменением порядка интегрирования* эти пределы почти всегда меняются.

Можно получить и другие формулы для вычисления тройного интеграла. Отметим две из них.

Когда мы просуммируем вдоль столбика, стоящего над прямоугольником w, и получим сумму

$$s_w = \left(\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\Delta z\right)\Delta x\,\Delta y,$$

то таких сумм s_w мы будем иметь столько, сколько прямоугольников внутри контура C', и ясно, что основная сумма s равна сумме всех s_w, а потому

$$s = \sum\left(\sum_{\zeta_1}^{\zeta} f(x, y, z)\,\Delta z\right)\Delta x\,\Delta y,$$

и, следовательно,

$$\lim s = \lim \sum \left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right)\Delta x\,\Delta y.$$

Интеграл в скобках есть функция только x и y. Если на время положить

$$\int_{\zeta_1=\varphi(x,y)}^{\zeta_2=\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \omega(x, y),$$

то

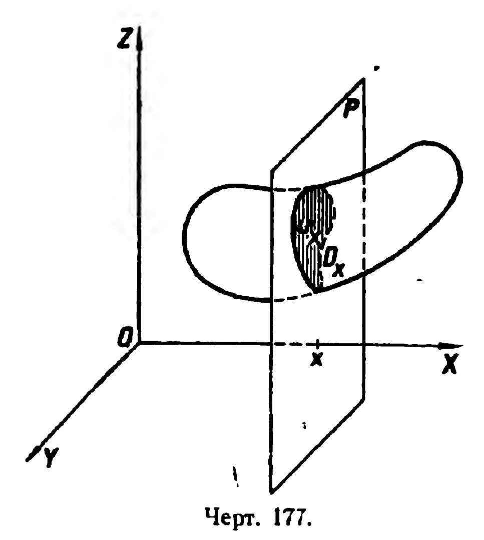
$$\lim s = \lim \sum \omega(x, y)\,\Delta x\,\Delta y,$$

и ясно, что в правой части мы имеем предел суммы, каждое слагаемое которой получается от умножения элементарной площадки $\Delta x\,\Delta y$ на значение функции $\omega(x, y)$ в какой-нибудь точке этой площадки. Следовательно, это двойной интеграл:

$$\lim s = \iint\limits_A \left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz\right) dx\,dy,$$

а потому имеем вторую формулу:

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_A \left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz\right) dx\,dy.$$



Черт. 177.

Наконец, третью формулу получим так.

Обозначим через D_x тот контур, по которому плоскость P, перпендикулярная к оси X в какой-нибудь точке x, пересекает поверхность S. С изменением x этот контур меняется.

Слагаемые суммы

$$s = \sum f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

сгруппируем так: соединим в одну группу все те слагаемые, которые относятся к параллелепипедам, лежащим в одном и том же слое, перпендикулярном к оси X.

Обозначим через s_x сумму той группы, которая относится к слою, ограниченному плоскостями, перпендикулярными к оси X в точках x и $x+\Delta x$. Все параллелепипеды этого слоя имеют одну и ту же высоту Δx, основания же их покрывают площадь, ограниченную контуром D_x. Поэтому можно написать, что

$$s_x = \left(\sum_{u_x} f(x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z\right)\Delta x.$$

и, следовательно,

$$s=\sum_{a}^{b}\left(\sum_{u_x} f(x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z\right)\Delta x.$$

В пределе сумма в скобках обратится в двойной интеграл от функции переменных y и z по площади, ограниченной контуром D_x:

$$\lim \sum_{u_x} f(x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z=\iint_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

а потому

$$\lim s=\int_{a}^{b}\left\{\iint_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz\right\}dx,$$

и, следовательно,

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int_{a}^{b}\left\{\iint_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz\right\}dx. \tag{7}$$

Мы получили три формулы.

Теорема. **Тройной интеграл может быть вычислен по одной из трех формул:**

$$\iiint f(x, y, z)\,dv=$$

$$=\int_{a}^{b}\left\{\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz\right]dy\right\}dx=$$

$$=\iint_{A}\left\{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz\right\}dx\,dy=$$

$$=\int_{a}^{b}\left\{\iint_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz\right\}dx.$$

Но при выводе этих формул плоскость XY у нас играла особую роль, которую с таким же правом может играть как плоскость XZ, так и плоскость YZ. Беря любую из них вместо XY, получим новый ряд формул, которые от полученных будут отличаться тем, что буквы x, y, z в них будут итти в другом порядке.

В частном случае из формулы (3) легко получить уже знакомую нам формулу для объема тела произвольной формы.

Если мы тело, ограниченное поверхностью S, пересечем плоскостью P, перпендикулярной к оси X в точке x, то в сечении получаем контур D_x. Он ограничивает на плоскости P некоторую площадь, которую обозначим через u_x и которую назовем плоскостью сечения. Очевидно, что u_x есть функция x.

Если теперь в равенстве

$$\iiint_{V} f(x, y, z)\,dv=\int_{a}^{b}\left\{\iint_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz\right\}dx$$

примем $f(x, y, z)=1$, то получаем:

$$\iiint\limits_V dv=\int\limits_a^b\left\{\iint\limits_{u_x} dy\,dz\right\}dx.$$

Но это равенство немедленно же обращается в равенство:

$$V=\int\limits_a^b u_x\,dx,$$

а потому уже известная теорема: объем любого тела равен интегралу от площади сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси.

§ 182. Тройные обобщенные интегралы.

Мы пока предполагали, что подъинтегральная функция в тройном интеграле непрерывна. Но можно понятие о тройном интеграле обобщить и на случаи прерывных функций.

Пусть функция $f(x, y, z)$ прерывна внутри поверхности S в точках $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Около каждой точки p_k воображаем замкнутую поверхность S_k; пусть v_k — пространство, ограниченное ею.

Из данного объема V мысленно выкидываем объемы $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Пусть V' — оставшийся объем. Внутри него данная функция уже непрерывна, а потому мы имеем право говорить об интеграле, взятом по объему V'. Пусть

$$G=\iiint\limits_{V'} f(x, y, z)\,dv.$$

Черт. 178.

Воображаем, что объемы $v_1, v_2, \ldots, v_m$ около точек прерывности бесконечно умаляются. Предел интеграла G, если только этот предел существует и конечен, называется обобщенным тройным интегралом от прерывной функции. Следовательно, по определению

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv=\lim_{V'\to V}\iiint\limits_{V'} f(x, y, z)\,dv.$$

Так вводится понятие об обобщенных тройных интегралах, распространенных на объемы, ограниченные со всех сторон.

Но вообразим, что поверхность S меняется, уходя всеми своими точками, или только некоторыми, в бесконечность. Предел интеграла

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

если только этот предел существует и конечен, дает нам обобщенный интеграл, распространенный на неограниченный объем.

§ 183. Тройной интеграл в полярных координатах.

Пусть C — замкнутый контур на сфере $\sum$ радиуса r с центром в O. Проведя прямые через центр O и все точки контура C, получим коническую поверхность с вершиной в O. Объем тела, ограниченного этой конической поверхностью и сферой $\sum$, обозначим через v и будем называть его сферическим конусом; часть же сферы, ограниченную контуром C, назовем сферическим основанием конуса и площадь ее обозначим через ω. Геометрически очевидно, что объем v сферического конуса во столько раз меньше объема всей сферы, во сколько раз площадь ω, служащая его основанием, меньше площади всей сферы:

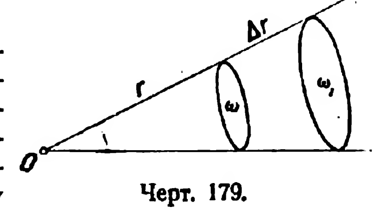
$$\frac{v}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\omega}{4\pi r^2},$$

откуда

$$v = \frac{1}{3} r\omega. \tag{1}$$

Объем сферического конуса равен одной трети произведения радиуса сферы на площадь сферического основания.

Видим, что при вычислении объема сферического конуса его можно рассматривать как обыкновенный конус с высотой, равной радиусу, и площадью основания, равной сферическому основанию.



Черт. 179.

Дадим радиусу r приращение Δr и опишем новую сферу $\sum'$ радиусом $r + \Delta r$. Получим новый сферический конус v', ограниченный прежней конической поверхностью и сферой $\sum'$. Разность $v' - v$, которую обозначим через Δv, равна объему тела, ограниченного конической поверхностью и сферами $\sum$ и $\sum'$. Если ω' — площадь, вырезаемая конической поверхностью из сферы $\sum'$, то согласно (1)

$$v' = \frac{1}{3}(r + \Delta r)\,\omega'.$$

Но площади ω и ω' относятся как квадраты радиусов:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{(r+\Delta r)^2}{r^2}, \quad \omega' = \omega\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^2,$$

а потому

$$v' = \frac{1}{3}\omega r\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^3$$

и

$$\Delta v = v' - v = \omega\Delta r + \omega\frac{\Delta r^2}{r} + \omega\frac{(\Delta r)^3}{3r^2},$$

$$\frac{\Delta v}{\omega\Delta r} = 1 + \frac{\Delta r}{r} + \frac{(\Delta r)^2}{3r^2}.$$

Если Δr бесконечно умаляется, то

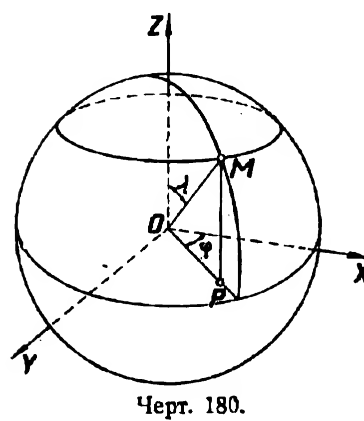
$$\lim \frac{\Delta v}{\omega \Delta r} = 1, \quad \Delta v \approx \omega \Delta r.$$

***Теорема.* Если Δr бесконечно мало, то**

$$\Delta v \approx \omega \Delta r. \qquad (2)$$

Следовательно, с точки зрения эквивалентности тело Δv можно рассматривать как прямой цилиндр с основанием ω и высотой Δr.

Заметив это, рассмотрим вычисление тройного интеграла в полярных координатах.



Черт. 180.

В полярных координатах положение точки M определяется тремя величинами (черт. 180): 1) ее расстоянием r от начала координат, 2) углом φ, который образует с плоскостью XZ плоскость, проходящая через точку M и ось Z, 3) углом λ между осью Z и радиус-вектором OM.

Угол φ равен углу между осью X и проекцией OP радиус-вектора OM на плоскость XY.

Величины r, φ, λ называются радиус-вектором точки M, полярным ее углом, или долготой, и ее азимутом, или дополнением до широты.

Чтобы всякую точку в пространстве можно было определить этими тремя величинами, достаточно, чтобы r мог принимать любое значение от 0 до $+\infty$. Угол φ достаточно менять только от 0 до 2π, а угол λ — от 0 до π.

Нетрудно видеть, что полярные координаты связаны с декартовыми равенствами:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\lambda \cos\varphi, \\ y &= r \sin\lambda \sin\varphi, \\ z &= r \cos\lambda. \end{aligned} \qquad (3)$$

Если мы будем менять только r, оставляя φ и λ одними и теми же, то точка M опишет луч, выходящий из начала координат. Меняя только угол φ, оставляя при этом r и λ одними и теми же, мы заставим точку M описать на сфере $\sum$ круг, параллельный плоскости XY. При изменении только угла λ точка M опишет на той же сфере меридиан.

Обратим внимание на те поверхности, которые определяются значением только одной координаты при произвольных значениях двух остальных.

Если нам дано только значение r, если, например, $r = l$, но λ и φ произвольны, то точка M лежит на сфере радиуса l. Следовательно, одним значением только радиус-вектора определяется сфера с центром в O. Давая r все возможные для него значения от 0 до $+\infty$, получим семейство сфер с центром в O.

Если дано значение φ, а именно если $\varphi = \alpha$, то все соответствующие точки будут лежать на плоскости, точнее говоря, на полуплоскости, проходящей через ось Z под углом α к плоскости XZ.

Все точки, для которых λ одно и то же, лежат на конической поверхности, которую получим, проведя какой-нибудь луч OM под углом λ к оси Z и затем вращая его вокруг оси Z при сохранении угла его наклона к этой оси.

Итак, одним значением для r определяется некоторая сфера; одним значением для φ определяется полуплоскость; одно значение для λ определяет коническую поверхность.

Эти сферы, полуплоскости и конические поверхности называются координатными поверхностями.

Если нам даны r, φ, λ, то тем самым нам даны три координатных поверхности: сфера, полуплоскость и коническая поверхность. Та точка M, в которой пересекаются эти три поверхности, и есть точка с координатами r, φ, λ.

Таким образом, через каждую точку M проходят три координатных поверхности.

При вычислении тройного интеграла в декартовых координатах мы делили пространство на элементарные объемы тремя системами плоскостей, перпендикулярных к осям координат. В полярных системах координат естественно прибегать к другому способу деления.

Если мы радиус-вектору r дадим ряд значений r_1, r_2, r_3, $\ldots r_n, \ldots$, то мы получим систему концентрических сфер. Те части, на которые ими разделится пространство, будем называть *сферическими слоями*.

Давая азимуту λ ряд значений λ_1, λ_2, λ_3, ..., мы получим систему конических поверхностей; они разделят пространство на *конические слои*.

Если дадим углу φ ряд значений φ_1, φ_2, φ_3, ..., то получим систему полуплоскостей. Ими пространство делится на *плоскостные слои*, или *клинья*.

Итак, имеем три типа слоев: сферические, конические и клинообразные.

Если мы возьмем какой-нибудь один из этих слоев, то он любой другой системой координатных поверхностей разобьется на части, которые будем называть *брусками*. Так, сферический слой системой конических поверхностей разобьется на бруски кольцеобразной формы, а системой полуплоскостей — на бруски серповидной формы.

Конический слой, слой между двумя коническими поверхностями, разрежется концентричными сферами на кольцеобразные бруски, а полуплоскостями — на клинообразные. Плоскостной слой между двумя полуплоскостями делится сферами на серповидные бруски, а коническими поверхностями — на клинообразные.

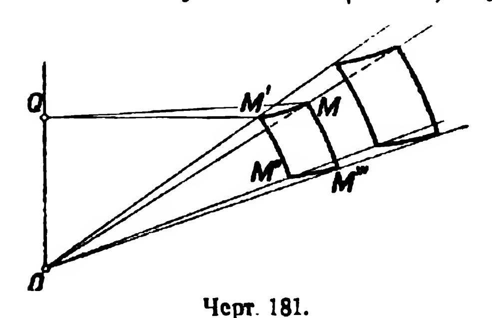
Необходимо привыкнуть достаточно отчетливо представлять себе эти слои и бруски.

Если мы проведем систему сфер, систему полуплоскостей и систему конических сечений, то пространство разобьется ими на части, которые будем называть *элементарными объемами в полярных координатах*.

Пусть dv — общий символ такого объема. Рассмотрим его форму. Воображаем, что сначала мы провели систему концентрических сфер. Пусть $\sum$ — одна из них радиуса r, а $\sum'$ — смежная с нею радиуса $r + \Delta r$, причем $\Delta r > 0$ (черт. 181). Между этими сферами имеем сферический слой. Назовем его слоем L. Проводим теперь систему конических поверхностей. Ими каждый сферический слой разобьется на кольцевидные бруски.

Пусть K и K' — две какие-нибудь смежные конические поверхности, азимуты которых λ и $\lambda+\Delta\lambda$, причем $\Delta\lambda>0$. Этими поверхностями из ранее взятого нами сферического слоя L вырежется некоторый брусок G. Когда мы, наконец, проведем систему полуплоскостей, то ими все бруски разделятся на элементарные объемы.

Пусть dv — тот объем, который две полуплоскости φ и $\varphi+\Delta\varphi$ вырезывают из бруска G. Следовательно, dv есть объем, ограниченный: 1) двумя сферами радиусов r и $r+\Delta r$, 2) двумя коническими поверхностями азимутов λ и $\lambda+\Delta\lambda$, 3) двумя полуплоскостями φ и $\varphi+\Delta\varphi$.



Черт. 181.

Если через ω обозначим площадь кривого сферического элементарного четырехугольника $MMM''M'''$, то по формуле (2)

$$dv \approx \omega\Delta r, \tag{4}$$

если Δr, $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$ бесконечно малы. Здесь M — та точка, координаты которой (r, λ, φ).

Если MQ — перпендикуляр из M на ось Z, то легко видеть, что дуга MM' есть дуга окружности радиуса QM с центром в Q. Поэтому ее длина равна $QM\cdot\Delta\varphi$, так как $\Delta\varphi$ равно углу между радиусами QM и QM'. Но ясно, что $QM=r\sin\lambda$, а потому

$$MM'=r\sin\lambda\,\Delta\varphi.$$

Также очевидно, что

$$MM'''=r\Delta\lambda. \tag{5}$$

Но площадь ω четырехугольника $M'MM''M''$ эквивалентна произведению $MM'\cdot MM'''$, а потому

$$\omega \approx r^2\sin\lambda\Delta\varphi\Delta\lambda.$$

Принимая во внимание (4), заключаем:

В полярных пространственных координатах элементарный объем

$$dv \approx r^2\sin\lambda\Delta r\Delta\varphi\Delta\lambda. \tag{6}$$

Пусть теперь имеем тройной интеграл

$$G=\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{7}$$

Тот объем, на который он распространен, делим на элементарные объемы в полярных координатах. Каждый такой объем dv помножаем на значение функции $f(x, y, z)$ в какой-нибудь его точке. Выражая x, y, z в полярных координатах и заменяя dv эквивалентным ему выражением, мы вместо слагаемого

$$f(x, y, z)\,dv$$

получим слагаемое

$$f(r\sin\lambda\cos\varphi,\ r\sin\lambda\sin\varphi,\ r\cos\lambda)\,r^2\sin\lambda\Delta r\,\Delta\varphi\,\Delta\lambda.$$

Предел всех таких слагаемых и даст нам интеграл G, а потому:

$$G=\iiint f(x, y, z)\,dv=\lim\sum f(x, y, z)\,r^2\sin\lambda\Delta r\,\Delta\varphi\,\Delta\lambda, \tag{8}$$

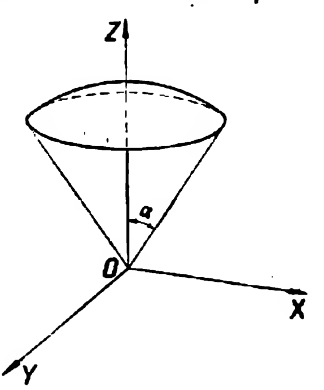
где в правой части x, y, z должны быть заменены их выражениями через r, φ и λ.

Чтобы теперь вычислить предел суммы правой части (8), мы поступаем так же, как в случае декартовой системы. Все слагаемые суммы

$$s = \sum f(x, y, z)\, r^2 \sin\lambda\, \Delta r\, \Delta\varphi\, \Delta\lambda$$

мы можем делить на различные группы. Мы можем поступить, например, так: соединить в одну группу те слагаемые, для которых φ и λ одни и те же. Это будут слагаемые, относящиеся к элементарным объемам, лежащим между двумя какими-нибудь полуплоскостями φ и $\varphi + \Delta\varphi$ и двумя коническими поверхностями λ и $\lambda + \Delta\lambda$. Во всех этих слагаемых φ, λ, $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ одни и те же, а потому $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ могут быть вынесены за скобки:

$$s = \sum \left\{ \sum f(x, y, z)\, r^2 \sin\lambda\, \Delta r \right\} \Delta\varphi\, \Delta\lambda.$$



Черт. 182.

После этого мы можем внутренние суммы собрать в новые группы, относя в одну группу те из них, для которых λ и $\Delta\lambda$ одни и те же, а меняется только φ. Получим столько групп, сколько плоских слоев. Тогда соединяем все эти слои в первоначальную сумму s. Получаем:

$$s = \sum \left[\sum \left\{ \sum f(x, y, z)\, r^2 \sin\lambda \Delta r \right\} \Delta\lambda \right] \Delta\varphi.$$

Переходим теперь к пределу. При этом каждая сумма обратится в соответствующий интеграл и мы получим:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int \left[\int \left\{ \int f(x, y, z)\, r^2 \sin\lambda\, dr \right\} d\lambda \right] d\varphi,$$

где в правой части каждый интеграл берется между соответствующими пределами.

Если бы мы стали группировать элементарные объемы в другом порядке, то и в окончательной формуле интегрирование по переменным тоже получилось бы в другом порядке.

Решим, например, такую задачу: вычислить координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного сферой радиуса a и конической поверхностью с вершиной в центре сферы и с углом α между ее осью и образующими.

Пусть ρ — плотность тела. Поместим начало координат в центре сферы. Ось конуса примем за ось Z. Оси X и Y возьмем в перпендикулярной к ней плоскости, безразлично как.

Если M — масса тела, ξ, η, ζ — координаты центра тяжести, то из симметрии тела относительно оси ясно, что центр тяжести лежит на ней, а потому $\xi = \eta = 0$. Далее, общие формулы дают

$$M = \iiint \rho\, dv, \quad M\zeta = \iiint \rho z\, dv.$$

Переходя к полярным координатам, имеем:

$$M = \rho \iiint r^2 \sin\lambda\, dr\, d\varphi\, d\lambda, \quad M\zeta = \rho \iiint r^3 \cos\lambda \sin\lambda dr\, d\varphi\, d\lambda.$$

Интегралы берутся по всему телу.

Если мы будем при постоянных λ и φ интегрировать сначала по r, то r надо менять от 0 до a; затем φ меняется от 0 до 2π; наконец, λ — от 0 до α. Имеем:

$$M = \rho \int_0^{\alpha} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{a} r^2 \sin\lambda\, dr \right] d\varphi \right\} d\lambda,$$

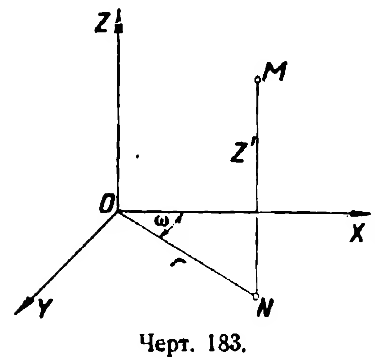
$$M\zeta = \rho \int_0^{\alpha} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{a} r^3 \cos\lambda \sin\lambda\, dr \right] d\varphi \right\} d\lambda.$$

Вычисляя интегралы, найдем:

$$M = \frac{2\pi}{3} \rho (1 - \cos\alpha) a^3; \quad \zeta = \frac{3a}{8} \frac{1 - \cos^2\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{3a}{8}(1 + \cos\alpha).$$

§ 184. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

Положение какой-нибудь точки в декартовых прямоугольных координатах определяется тремя числами: абсциссой, ординатой и апликатой. В сферических координатах положение той же точки также определяется тремя числами, но уже иными: радиус-вектором, азимутом и долготой. Рассмотрим третью систему координат, называемых цилиндрическими. Их очень удобно рассматривать одновременно с декартовыми.



Черт. 183.

Пусть дана какая-нибудь система декартовых координат и некоторая точка $M(x, y, z)$. Пусть N — ее проекция на плоскость XY (черт. 183).

Будем на плоскости XY одновременно с декартовыми координатами рассматривать также и полярные, принимая ось X за полярную ось, и пусть (r, ω) — полярные координаты точки N.

Апликата z данной точки M и полярные координаты r и ω ее проекции N на плоскость XY, взятые в своей совокупности, называются цилиндрическими координатами точки M.

Легко видеть, что этими тремя числами r, ω и z положение точки M вполне определяется. Действительно, числами r и ω вполне определяется точка N. Зная z и восставив перпендикуляр в точке N к плоскости XY, найдем точку M.

Рассмотрим координатные поверхности этой системы, т. е. те поверхности, которые определяются значением только одной координаты при произвольных значениях двух других.

Если дан только z, а r и ω произвольны, то мы имеем плоскость, параллельную плоскости XY. Давая z различные значения $z_1, z_2, z_3, \ldots$, получим ряд параллельных плоскостей, которыми пространство разобьется на плоские слои.

Если дан только r, а z и ω произвольны, то мы имеем цилиндрическую круговую поверхность с образующими, параллельными оси Z. Меняя r, давая ему ряд значений $r_1, r_2, r_3, \ldots$, получим систему цилиндрических поверхностей. Ими пространство разделится на цилиндрические слои.

Наконец, если дан только угол ω, а r и z произвольны, то имеем полуплоскость, проходящую через ось Z. Давая ω ряд значений $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, получим систему полуплоскостей, которыми пространство делится на клинообразные слои.

Положим теперь, что требуется вычислить тройной интеграл, распространенный по объему V. Делим его на элементарные слои так. Сначала, давая радиусу r ряд значений $r_1, r_2, r_3, \ldots$, делим тело на цилиндрические слои. Затем, давая ω ряд значений $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, строим систему полуплоскостей,

которыми цилиндрические слои разобьются на цилиндрические столбики. Наконец, давая z ряд значений $z_1, z_2, z_3, \ldots$, строим систему параллельных плоскостей, которыми цилиндрические столбики разобьются на элементарные объемы.

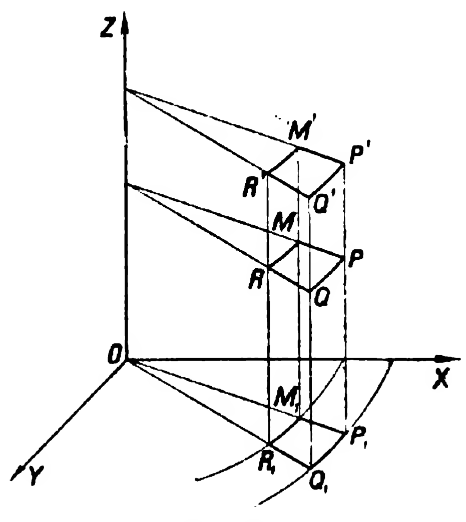
Те же самые поверхности мы могли бы провести в другом порядке. Мы могли бы сначала провести плоскости $z_1, z_2, z_3, \ldots$, потом полуплоскости $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ и, наконец, цилиндрические поверхности $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Тогда сначала тело разбилось бы на плоские слои, затем каждый слой — на клинья и, наконец, каждый клин — на прежние элементарные объемы.

Вообще мы имеем три системы поверхностей: цилиндрические, плоскости и полуплоскости. Любую систему можно провести первой, любую из двух остальных второй. Так как число перестановок из трех предметов равно шести, то и шестью способами можно разбить тело на элементарные объемы.

Эти элементарные объемы потом можем собрать в тело тем или иным способом.

Найдем выражение для элементарного объема в цилиндрических координатах.

Пусть $M(r, \omega, z)$ — какая-нибудь точка. Через нее проходит цилиндрическая поверхность r, плоскость z и полуплоскость ω. Дадим r приращение Δr. Получим новую цилиндрическую поверхность и тем самым цилиндрический слой между нею и прежней. Строим полуплоскость $\omega + \Delta\omega$; вместе с первой полуплоскостью ω она вырежет из цилиндрического слоя цилиндр, стоящий на четырехугольнике $M_1P_1Q_1R_1$. Из этого цилиндра плоскости z и $z + \Delta z$ вырежут элементарный объем $MPQ'R'$, который обозначим через dv. Как объем цилиндра он равен произведению высоты Δz на площадь основания, равную $M_1P_1Q_1R_1$ и эквивалентную $rdrd\omega$, а потому



Черт. 184.

$$dv \approx rdrd\omega dz. \tag{1}$$

Таково выражение элементарного объема в цилиндрических координатах.

Если теперь требуется вычислить тройной интеграл

$$G = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv, \tag{2}$$

распространенный на объем V, то делим этот объем на элементарные объемы типа dv (черт. 184). В каждом из них выбираем точку, для простоты точку M. Выражаем значение функции f в этой точке через r, ω, z:

$$f(x, y, z) = f(r\cos\omega, r\sin\omega, z) = \Phi(r, \omega, z), \tag{3}$$

множим это значение на dv и берем суммы таких произведений, составленных для каждого элементарного объема. При переходе к пределу в этой сумме

$$s = \sum f(x, y, z)\, dv = \sum \Phi(r, \omega, z)\, dv,$$

заменяем dv из (1) эквивалентной ему величиной. Получим сумму

$$\sigma = \sum \Phi(r, \omega, z)\, rdr\, d\omega\, dz. \tag{4}$$

Предел ее дает интеграл G. Чтобы вычислить его, мы разбиваем слагаемые суммы на группы. Можем, например, относить в одну группу все слагаемые,

принадлежащие одному и тому же цилиндрическому столбику. В этих слагаемых меняется только z, а r, ω, Δr и $\Delta\omega$ одни и те же.

Соединяя группы цилиндрических столбиков, лежащих в одном цилиндрическом слое, в одну группу, получим группы цилиндрических слоев. Сумма всех этих групп даст сумму σ в такой форме:

$$\sigma = \sum \Phi(r, \omega, z)\, r\Delta r\, \Delta\omega\, \Delta z = \sum \left\{ \sum \left[\sum r\Phi\, \Delta z \right] \Delta\omega \right\} \Delta r.$$

Переход к пределу дает равенство

$$\iiint f(x, y, z)\, dv = \iiint f(r\cos\omega, r\sin\omega, z)\, r dr d\omega dz =$$
$$= \int \left\{ \int \left[\int f(r\cos\omega, r\sin\omega, z)\, r dr \right] \right\} d\omega \Big\} dz,$$

где интегралы в правой части берутся между соответствующими пределами. Если элементарные объемы будем собирать в другом порядке, получим простые интегрирования в другом порядке.

§ 185. Заключение.

1. В декартовых координатах

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv =$$
$$= \int_a^b \left\{ \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx =$$
$$= \iint\limits_{C'} \left\{ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\, dz \right\} dx dy =$$
$$= \int_a^b \left\{ \iint\limits_{u_x} f(x, y, z)\, dy\, dz \right\} dx.$$

2. Диференциальный объем выражается:

а) в декартовых координатах: $dv = dx\, dy\, dz$,
б) в полярных координатах: $dv \approx r^2 \sin\lambda\, dr d\omega d\lambda$,
в) в цилиндрических координатах: $dv \approx r dr d\omega dz$.

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ НА ПЛОСКОСТИ.

Понятие интеграла как предела суммы мы установили для функций одного, двух и трех переменных. При этом, в зависимости от числа переменных, суммы эти были следующих типов:

$$1) \sum f(x)\Delta x, \quad 2) \sum\sum f(x, y)\Delta x\Delta y, \quad 3) \sum\sum\sum f(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

И вот оказывается, что понятие интеграла как предела суммы и притом суммы типа (1), а не (2) или (3) можно распространить и на случай функций двух и большего числа переменных. Результатом такого обобщения получаются так называемые криволинейные интегралы, играющие очень большую роль в некоторых отделах как Анализа, так и Механики. В Анализе они, например, служат могучим орудием при изучении свойств функций комплексного переменного, в Механике — в теории жидкостей и газов.

Криволинейные интегралы могут быть рассматриваемы как на плоскости, так и в пространстве. В этой главе мы рассмотрим теорию их на плоскости.

§ 186. Предварительные замечания.

Замечания. 1. Будем в этой главе *путем* называть всякую *направленную* кривую, имеющую форму одного непрерывного следа. Такой путь всегда можно представить параметрически. Действительно, вообразим, что данный путь пробегается точкой $M(x, y)$. Тогда ее координаты выразятся как некоторые функции времени t и если

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{1}$$

то, забывая, что t — время, мы получаем координаты точки кривой как функции параметра t.

Пусть t_0 и T — те значения параметра, которые соответствуют точкам A и B (черт. 185). Если при изменении t от t_0 до T точка пробегает путь в направлении от A к B, то она пробежит его в направлении от B к A, если t будем менять от T до t_0. Следовательно, направление пути определяется направлением изменения параметра.

Черт. 185.

Если путь дан уравнениями (1), то будем говорить, что он представлен параметрически функциями $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Примем $t = \omega(\tau)$, где $\omega(\tau)$ — произвольно взятая непрерывная функция, но обязательно монотонная и такая, что при изменении τ от некоторого

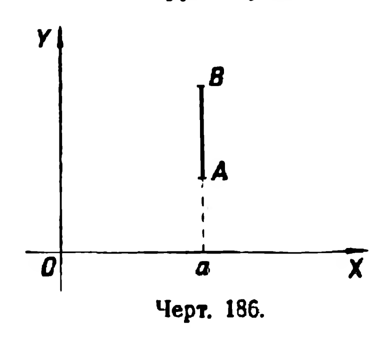
значения τ_1 до другого значения τ_2 параметр t меняется как раз от t_0 до T. Тогда x и y можно рассматривать как функции τ, и если

$$x=\lambda(\tau), \quad y=\mu(\tau), \qquad (2)$$

то мы будем иметь иное параметрическое представление того же пути. Следовательно,

всякий путь может быть представлен параметрически с помощью различных функций.

От представления уравнениями (1) мы перешли к представлению уравнениями (2), полагая t равным некоторой функции от нового переменного τ. Нетрудно убедиться и в обратном, а именно в том, что



Черт. 186.

если один и тот же путь параметрически представлен двумя различными способами, а именно уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \qquad (3)$$

и уравнениями

$$x=\lambda(\tau), \quad y=\mu(\tau), \qquad (4)$$

то от первого способа представления всегда можно перейти ко второму, рассматривая параметр t как некоторую вполне определенную, монотонную и непрерывную функцию параметра τ.

Действительно, каждому значению τ' параметра τ соответствует единственная точка на пути, которой в свою очередь соответствует некоторое единственное значение t' параметра t. Если это значение t' будем считать соответствующим значению τ', то получим t как однозначную функцию от τ. Пусть

$$t=\omega(\tau).$$

Ясно, что если в (3) будем считать t как раз этой функцией от τ, то x и y как функции τ представятся уравнениями (4), и мы от представления через функции φ и ψ перейдем к представлению через функции λ и μ.

Когда τ меняется непрерывно и монотонно, то соответствующая точка по кривой движется в одном и том же направлении, а потому и t меняется тоже монотонно и непрерывно. Следовательно, $\omega(\tau)$ — монотонная и непрерывная функция.

Заметим, что всякий отрезок AB, параллельный оси Y (черт. 186), можно рассматривать как путь. Если он пересекает ось X в точке $x=a$, то параметрически он может быть представлен уравнениями:

$$x=a, \quad y=t,$$

где t меняется от ординаты aA точки A до ординаты aB точки B. Самое общее же его параметрическое представление будет

$$x=a, \quad y=\omega(t),$$

где $\omega(t)$ может быть любой непрерывной функцией, монотонно меняющейся в некотором интервале (t_1, t_2) так, что когда t пробегает его, то y меняется от aA до bB.

Точно так же и всякий отрезок AB (черт. 187), параллельный оси X, может быть представлен параметрически или уравнениями

$$x = t, \quad y = k,$$

где k — ордината точки A, или вообще уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = k,$$

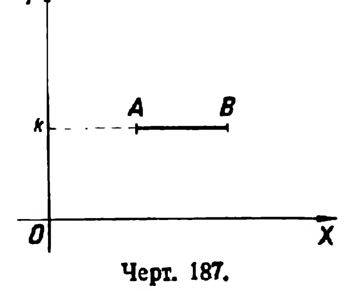
где t должно пробегать такой интервал (t', t''), чтобы при этом x изменялся от kA до kB.

Отметим, что для отрезка, параллельного оси ординат, x постоянен, а потому $dx = 0$. Наоборот, для отрезка, параллельного оси абсцисс, уже $dy = 0$, потому что y постоянен.

2. Если $\Phi(x, y)$ — функция двух аргументов, то ее значение в точке A мы часто будем обозначать так:

$$\Phi_A,$$

выписывая только характеристику и ставя при ней индексом символ точки. Такое обозначение удобно не только по своей краткости, но главным образом потому, что его можно написать, не имея обозначений для координат точки.



Черт. 187.

Для разности $\Phi_B - \Phi_A$ между значениями функции $\Phi(x, y)$ в двух точках мы введем такое обозначение:

$$[\Phi(x, y)]_A^B.$$

Следовательно, если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек A и B, то

$$[\Phi(x, y)]_A^B = \Phi_B - \Phi_A = \Phi(x_2, y_2) - \Phi(x_1, y_1).$$

3. Всякую функцию $\varphi(x)$ только одного аргумента x всегда можно рассматривать как частный случай функции двух аргументов x и y:

$$\varphi(x) = \omega(x, y),$$

где $\omega(x, y)$ — функция, сохраняющая при данном x одно и то же значение, какое бы ни было y.

Если функция $\varphi(x)$ рассматривается как функция двух аргументов x и y, то ее значение во всех точках любой прямой, параллельной оси Y, будет одно и то же, потому что, когда точка (x, y) перемещается по этой прямой, то меняется только y, а x сохраняет свое значение.

Точно так же всякую функцию $\psi(y)$ только одного аргумента y можно рассматривать как такую функцию двух аргументов x и y, которая при заданном y сохраняет одно и то же значение при всяком x. Как функция двух аргументов функция $\psi(y)$ имеет одно и то же значение во всех точках любой прямой, параллельной оси X.

§ 187. Диференциальное выражение.

Ниже мы ограничимся рассмотрением только функций двух переменных.

Диференциальным выражением называется всякое выражение, в которое входят диференциалы.

Линейным диференциальным выражением называется всякое выражение типа

$$\varphi_1(x, y)\,d\psi_1(x, y)+\varphi_2(x, y)\,d\psi_2(x, y)+\ldots+\varphi_n(x, y)\,d\psi_n(x, y), \quad (1)$$

т. е. всякая сумма, каждое слагаемое которой есть произведение некоторой функции на диференциал другой функции.

В частном случае выражение вида

$$\varphi(x, y)\,d\psi(x, y), \quad (2)$$

т. е. произведение одной функции на диференциал другой, есть линейное диференциальное выражение; еще более частный случай дают выражения типа

$$f(x, y)\,dx, \quad \Phi(x, y)\,dy, \quad (3)$$

т. е. произведения функции на диференциал одного какого-нибудь аргумента.

Выражение типа

$$\varphi(x, y)\,dx+\psi(x, y)\,dy \quad (4)$$

назовем приведенной формой диференциального выражения.

Если в (4) одна из функций равна нулю, то получим выражения типа (3).

Теорема. **Всякое линейное диференциальное выражение общего типа**

$$p=\varphi_1(x, y)\,d\psi_1(x, y)+\varphi_2(x, y)\,d\psi_2(x,y)+\ldots+\varphi_n(x,y)\,d\psi_n(x,y) \quad (5)$$

может быть представлено в приведенной форме:

$$p=\Phi(x, y)\,dx+F(x, y)\,dy. \quad (6)$$

Действительно, опуская для сокращения письма аргументы, что в дальнейшем часто будем делать, имеем:

$$\varphi_1\,d\psi_1=\varphi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\,dx+\varphi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\,dy,$$

$$\varphi_2\,d\psi_2=\varphi_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\,dx+\varphi_2\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\,dy,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n d\psi_n=\varphi_n\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\,dx+\varphi_n\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\,dy.$$

Складывая эти равенства, причем правые части складываем по столбцам, и обозначая коэфициенты при dx и dy через $\Phi(x, y)$ и $F(x, y)$, получим (6), и теорема доказана.

Она имеет большое значение, потому что показывает, что при теоретических исследованиях мы можем ограничиться только выражением типа (6), так как всякое иное линейное диференциальное выражение можно представить в этой форме.

Выражение

$$p=\varphi(x, y)\,dx+\psi(x, y)\,dy \quad (7)$$

есть функция двух переменных x и y и их диференциалов. Но если мы в нем x и y будем рассматривать как некоторые функции третьего переменного, то оно обратится в функцию этого переменного и его диференциала. Действительно, если

$$x=\lambda(t), \quad y=\mu(t),$$

то из (7)

$$p=\{\varphi(\lambda(t), \mu(t))\lambda'(t)+\psi(\lambda(t), \mu(t))\mu'(t)\}\, dt.$$

Обозначая множитель при dt через Φ, заключаем:

всякое линейное диференциальное выражение

$$p=\varphi_1(x, y)d\psi_1(x, y)+\ldots+\varphi_n(x, y)d\psi_n(x, y), \tag{8}$$

если в нем рассматривать x и y как функции t, представится в форме

$$p_t=\Phi(t)\, dt, \tag{9}$$

т. е. как функция t и его диференциала.

Когда выражение (8) мы рассматриваем как функцию t, то это мы будем отмечать, ставя t индексом у p, как это сделано в равенстве (9).

Очевидно, что сумма двух любых линейных диференциальных выражений:

$$p=\varphi d\psi+\lambda d\mu+\ldots+\nu d\omega,$$

$$q=\Phi dF+GdH+\ldots+WdU,$$

есть тоже линейное диференциальное выражение.

§ 188. Обобщение интегральной суммы.

Под интегральной суммой от функции одного переменного мы до сих пор разумели сумму типа

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+\ldots+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

т. е. сумму, каждое слагаемое которой представляется в форме произведения значения функции на соответствующее приращение ее аргумента. Обобщая понятие интегральной суммы, рассмотрим сумму, слагаемые которой получаются умножением значения данной функции не на приращение ее аргумента, а на приращение некоторой другой функции.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две функции, непрерывные в некотором интервале (a, b). Попрежнему через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ обозначим ряд произвольно взятых чисел, промежуточных между a и b.

Когда x переходит от значения x_k к значению x_{k+1}, то функция $\psi(x)$ получает приращение

$$\Delta\psi(x_k)=\psi(x_{k+1})-\psi(x_k).$$

Таким образом, одновременно с числами

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$$

мы имеем разности

$$\psi(x_1)-\psi(a),\quad \psi(x_2)-\psi(x_1),\quad \dots,\quad \psi(b)-\psi(x_{n-1}),$$

короче обозначаемые так:

$$\Delta\psi(x_0),\quad \Delta\psi(x_1),\quad \dots,\quad \Delta\psi(x_{n-1}).$$

Пусть ξ_k — произвольно взятая точка на интервале (x_k, x_{k+1}). Умножая значение функции $\varphi(x)$ в этой точке на приращение функции $\psi(x)$ при переходе x от x_k к x_{k+1}, получим произведение

$$\varphi(\xi_k)\,\Delta\psi(x_k).$$

Пусть s — сумма всех таких произведений, составленных для всех подъинтервалов (x_k, x_{k+1}). Следовательно,

$$s=\varphi(\xi_0)\,\Delta\psi(x_0)+\varphi(\xi_1)\,\Delta\psi(x_1)+\dots+\varphi(\xi_{n-1})\,\Delta\psi(x_{n-1}),$$

или короче

$$s=\sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\Delta\psi(x_k). \tag{1}$$

Ясно, что в частном случае, если $\psi(x)=x$, то сумма (1) перейдет в сумму

$$\sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{2}$$

т. е. в интегральную сумму обычной формы. Поэтому сумма (1) является естественным обобщением суммы (2).

Рассмотрим предел суммы (1), предполагая, что число промежуточных точек x_k бесконечно возрастает так, что длина наибольшего промежутка между ними бесконечно умаляется.

Допуская, что производная $\psi'(x)$ непрерывна, мы по теореме Лагранжа имеем:

$$\Delta\psi(x_k)=\psi(x_{k+1})-\psi(x_k)=\psi'(\eta_k)\,(x_{k+1}-x_k),$$

где η_k — некоторое число, промежуточное между x_k и x_{k+1}, а потому сумма (1) может быть представлена в форме

$$s=\sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\psi'(\eta_k)\,\Delta x_k. \tag{3}$$

Рассмотрим одновременно с этой суммой также сумму

$$\sigma=\sum_a \varphi(\xi_k)\,\psi'(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что соответствующие факторы этих двух сумм отличаются друг от друга бесконечно мало. Действительно, разность факторов при Δx_k равна

$$\varphi(\xi_k)\,[\psi'(\eta_k)-\psi'(\xi_k)].$$

Так как точки ξ_k и η_k лежат в одном интервале, то все разности в скобках бесконечно умаляются, когда интервалы (x_k, x_{k+1}) бесконечно

умаляются, потому что функция $\psi'(x)$ по условию непрерывна. По второму принципу заключаем, что

$$\lim s = \lim \sigma = \lim \sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\psi'(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx,$$

и получаем теорему:

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а также производная функции $\psi'(x)$ непрерывны в интервале (a, b), то

$$\lim \sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\Delta\psi(x_k) = \int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x).$$

Это равенство, очевидно, есть естественное обобщение равенства

$$\lim \sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

§ 189. Определение криволинейного интеграла.

Предполагаем функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывными в рассматриваемых областях. Если мы в диференциальном выражении

$$p = \varphi(x, y)\,d\psi(x, y), \tag{1}$$

считая x и y декартовыми координатами точки на плоскости, примем их равными некоторым функциям параметра t:

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t), \tag{2}$$

то p обратится в функцию переменного t. Пусть

$$p_t = \Phi(t)\,dt. \tag{3}$$

Предполагая, что $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ непрерывны в интервале от t_0 до T, мы можем взять от p_t интеграл между этими пределами. Этот интеграл

$$G = \int_{t_0}^{T} \Phi(t)\,dt \tag{4}$$

мы обыкновенно будем представлять в такой форме:

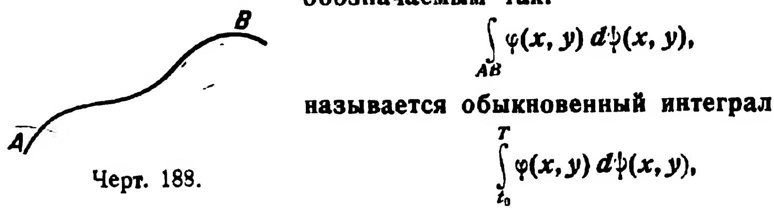
$$G = \int_{t_0}^{T} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y), \tag{5}$$

помня при этом, что x и y надо считать функциями t.

Очевидно, что вообще в подъинтегральном выражении (5) мы можем принять x и y равными любым непрерывным функциям $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, и от выбора этих функций будет зависеть и значение интеграла G.

Этот выбор функций $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ очень просто толкуется геометрически. Уравнениями (2) определяется параметрически некоторый путь AB, пробегаемый в определенном направлении при изменении t от t_0 до T (черт. 188). Обратно, если мы возьмем какой-нибудь направленный путь AB, то для него можно найти пару функций, которыми он определяется параметрически.

Определение. **Криволинейным интегралом от данного выражения $\varphi(x, y)\,d\psi(x, y)$, взятым по направленному пути AB от A к B и обозначаемым так:**



Черт. 188.

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y),$$

называется обыкновенный интеграл

$$\int_{t_0}^{T} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y),$$

который получится, если в подъинтегральном выражении рассматривать x и y как функции, которыми путь определяется параметрически. Следовательно, если путь AB в направлении от A к B определяется параметрически уравнениями

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t)$$

при изменении параметра от t_0 до T, то по определению

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y) = \int_{t_0}^{T} \varphi(\lambda(t), \mu(t))\,d\psi(\lambda(t), \mu(t)).$$

Но если мы возьмем путь в направлении от B к A, то t надо уже менять от T до t_0, а потому

$$\int_{BA} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y) = \int_{T}^{t_0} \varphi(\lambda(t), \mu(t))\,d\psi(\lambda(t), \mu(t)).$$

Следовательно,

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y) = -\int_{BA} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y). \qquad (6)$$

Видим, что необходимо принимать во внимание направление пути. Изменить в криволинейном интеграле направление пути — это все равно, что переставить пределы в обыкновенном интеграле.

Определение и обозначение криволинейного интеграла возбуждают один вопрос. Чтобы значение интеграла

$$G = \int_{AB} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y) \qquad (7)$$

было вполне определено, еще далеко недостаточно, чтобы были даны функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Необходимо должен быть дан также и путь AB. Но и этого еще недостаточно. Мы должны еще знать те функции, которыми путь представлен параметрически.

Но один и тот же путь может быть представлен параметрически различными функциями. И вот возникает вопрос: не зависит ли значение криволинейного интеграла не только от пути, по которому он берется, но также и от выбора функций для его параметрического представления? Только когда мы докажем, что его значение зависит только от самого пути, а не от функций, которыми он дан, только тогда получают

оправдание как введение самого понятия криволинейного интеграла, так и его обозначение. Пусть же путь AB, с одной стороны, представляется уравнениями

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t) \tag{8}$$

при изменении t от t_0 до T, а с другой стороны, — уравнениями

$$x = \lambda_1(\tau), \quad y = \mu_1(\tau) \tag{9}$$

при изменении τ от τ_0 до τ_1, и пусть

$$G_1 = \int_{t_0}^{T} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y),$$

где

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t) \tag{10}$$

и

$$G_2 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y),$$

где

$$x = \lambda_1(\tau), \quad y = \mu_1(t). \tag{11}$$

Мы знаем, что от представления (8) можно перейти к представлению (9), полагая в (8)

$$t = \omega(\tau),$$

где $\omega(\tau)$ — некоторая вполне определенная функция. Делаем в (10) подстановку $t = \omega(\tau)$. Тогда x и y обратятся в функции от τ, а t_0 и T заменятся через τ_0 и τ_1, и мы найдем, что

$$G_1 = G_2.$$

Получается

Теорема. **Значение криволинейного интеграла не зависит от функций, которыми представлен путь, а только от самого пути.**

Поэтому-то и в обозначении

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y)$$

указывается только путь, а не функции, его определяющие.

Мы пока рассматривали интеграл от диференциального выражения в простейшей форме.

Определение. **Криволинейным интегралом от любого данного диференциального выражения по направленному пути AB, параметрически представленному функциями $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ при изменении t от t_0 до T, называется обыкновенный интеграл между пределами t_0 и T от выражения, которое получится, если в данном диференциальном выражении x и y заменить через $\lambda(t)$ и $\mu(t)$. Следовательно, по определению**

$$\int_{AB} (\varphi_1(x, y)\, d\psi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\, d\psi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)\, d\psi_n(x, y)) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} (\varphi_1(x, y)\, d\psi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\, d\psi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)\, d\psi_n(x, y)),$$

где в правой части $x = \lambda(t)$, $y = \mu(t)$.

Этот интеграл не зависит от выбора функций для параметрического представления пути.

Действительно, интеграл в правой части распадается на сумму интегралов, каждый из которых не зависит от выбора функций $\lambda(t)$ и $\mu(t)$.

Всякое линейное диференциальное выражение может быть представлено в приведенной форме. Поэтому всякий криволинейный интеграл может быть представлен в такой форме:

$$G=\int_{AB}\varphi(x,y)\,dx+\psi(x,y)\,dy.$$

Обыкновенно в такой форме он и появляется в приложениях. В частном случае, если одна из функций φ или ψ равна нулю, получаются интегралы типа

$$\int_{AB}\varphi(x,y)\,dx=\int_{t_0}^{T}\varphi(\lambda,\mu)\,\lambda'(t)\,dt,$$

и типа

$$\int_{AB}\psi(x,y)\,dy=\int_{t_0}^{T}\psi(\lambda,\mu)\,\mu'(t)\,dt.$$

§ 190. Криволинейный интеграл как предел суммы.

Пусть уравнениями

$$x=\lambda(t),\quad y=\mu(t)$$

представлен некоторый путь. Если α — угол направления касательной, то, как известно,

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}=\frac{\lambda'(t)}{\sqrt{\lambda'(t)^2+\mu'(t)^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{dy}{ds}=\frac{\mu'(t)}{\sqrt{\lambda'(t)^2+\mu'(t)^2}}.$$

Черт. 189.

Правые части могут перестать быть непрерывными в тех точках, в которых теряют непрерывность производные $\lambda'(t)$ и $\mu'(t)$. Тогда в этих точках и угол α как функция t тоже прерывен, а потому эти точки необходимо особые, а именно точки возврата, или угловые точки.

Мы предположим пока, что путь не имеет таких точек. Следовательно, предположим непрерывными не только функции $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, но и их производные. Также предположим непрерывными функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ и частные производные от ψ.

Если x и y рассматривать как функции t, то φ и ψ становятся тоже функциями t. Пусть

$$\Phi(t)=\varphi(x,y),\quad F(t)=\psi(x,y)\tag{1}$$

при

$$x=\lambda(t),\quad y=\mu(t).$$

Имеем

$$F'(t)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\lambda'(t)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mu'(t),$$

и так как по предположению

$$\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \lambda'\ \text{и}\ \mu'$$

непрерывны, то непрерывна и производная $F'(t)$.

Заметив это, рассмотрим криволинейный интеграл

$$G=\int\limits_{\breve{AB}}\varphi(x,y)\,d\psi(x,y) \tag{2}$$

и докажем, что его можно рассматривать как предел некоторой интегральной суммы.

Согласно обозначениям в равенстве (1) имеем

$$G=\int\limits_{t_0}^{T}\Phi(t)dF(t). \tag{3}$$

Но интеграл правой части есть предел суммы

$$s=\sum_{t_0}^{T}\Phi(\tau_k)\,\Delta F(t_k), \tag{4}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — числа, промежуточные между t_0 и T, и число τ_k принадлежит промежутку (t_k, t_{k+1}).

Каждому значению параметра t соответствует точка на пути. Пусть вообще A_k и A'_k — точки, соответствующие значениям t_k и τ_k параметра. Через (x_k, y_k) и (ξ_k, η_k) обозначим координаты этих точек. Следовательно,

$$x_k=\lambda(t_k),\quad y=\mu(t_k),\quad \xi_k=\lambda(\tau_k),\quad \eta_k=\mu(\tau_k),$$

и согласно (1)

$$\Phi(\tau_k)=\varphi(\xi_k, \eta_k),\quad F(t_k)=\psi(x_k, y_k),$$

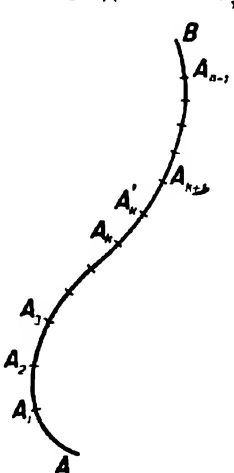
$$\Delta F(t_k)=\psi(x_{k+1}, y_{k+1})-\psi(x_k, y_k)=\Delta\psi(x_k, y_k),$$

а потому сумма s может быть переписана в форме

$$s=\sum_{AB}\varphi(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\psi(x_k, y_k) \tag{5}$$

и интеграл G есть предел этой суммы, которую можно назвать интегральной суммой по пути AB:

$$\int\limits_{\breve{AB}}\varphi(x, y)\,d\psi(x,y)=\lim\sum_{AB}\varphi(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\psi(x_k, y_k). \tag{6}$$



Черт. 190.

Рассмотрим, как составляется сумма (5).

Каждая точка A_k соответствует значению t_k параметра t (черт. 190). Так как числа t_k берутся произвольно, то и точки A_k могут быть взяты произвольно. Точно так же и каждая точка A'_k есть произвольно взятая точка на дуге A_kA_{k+1}. Наконец, всякое слагаемое

$$\varphi(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\psi(x_k, y_k)$$

суммы (5) есть произведение значения функции φ в точке A'_k на приращение функции ψ при переходе от точки A_k к точке A_{k+1}.

При переходе к пределу промежутки между числами t_k бесконечно умаляются. Поэтому бесконечно умаляются дуги A_kA_{k+1}, на которые разделен путь. Получается

Теорема. **Криволинейный интеграл**

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y)$$

есть предел суммы

$$\sum_{AB} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k),$$

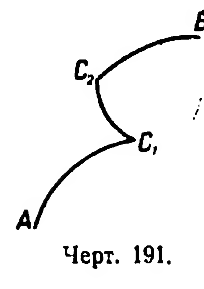
слагаемые которой получаются так: весь путь делится на элементарные дуги произвольно выбранными точками и затем значение функции $\varphi(x, y)$ в какой-нибудь точке каждой элементарной дуги помножается на разность между значениями другой функции $\psi(x, y)$ в конце и начале этой дуги.

При переходе к пределу предполагают, что наибольшая из длин элементарных дуг бесконечно умаляется. Следовательно,

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) = \lim \sum_{AB} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k). \quad (7)$$

Бросается в глаза полная аналогия этого равенства с равенством

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x) = \sum_a^b \varphi(\xi_k)\, \Delta\psi(x_k).$$



Черт. 191.

Все различие только в том, что вместо функций одного переменного стоят функции двух переменных и что вместо того, чтобы делить на бесконечно малые части отрезок (a, b), делится на бесконечно малые дуги кривой путь.

В частном случае равенство (7) дает равенства

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, dx = \lim \sum_{AB} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k =$$

$$= \lim \{\varphi(\xi_0, \eta_0)\, \Delta x_0 + \varphi(\xi_1, \eta_1)\, \Delta x_1 + \ldots + \varphi(\xi_{n-1}, \eta_{n-1})\, \Delta x_{n-1}\}, \quad (8)$$

$$\int_{AB} \psi(x, y)\, dy = \lim \sum_{AB} \psi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k =$$

$$= \lim \{\psi(\xi_0, \eta_0)\, \Delta y_0 + \psi(\xi_1, \eta_1)\, \Delta y_1 + \ldots + \psi(\xi_{n-1}, \eta_{n-1})\, \Delta y_{n-1}\}.$$

Но равенство (7) доказано пока только для пути без угловых точек. Пусть путь имеет угловые точки, для простоты предположим, что только две C_1 и C_2, которыми путь делится на три части. Рассматриваемая отдельно, каждая часть есть путь без угловых точек, а потому для

каждой из них применимо равенство (7). Имеем

$$\int_{AC_1} \varphi\, d\psi = \lim \sum_{AC_1} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k),$$

$$\int_{C_1C_2} \varphi\, d\psi = \lim \sum_{C_1C_2} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k),$$

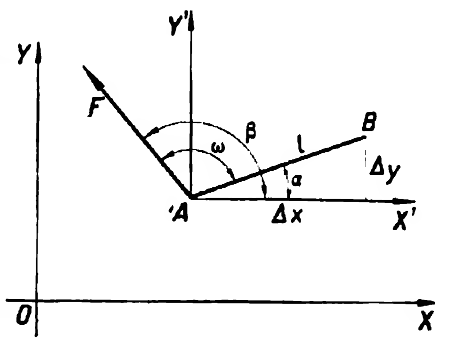
$$\int_{C_2B} \varphi\, d\psi = \lim \sum_{C_2B} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k).$$

Складывая эти равенства, опять получим равенство (7), и теорема доказана окончательно.

§ 191. Работа силы.

Пусть постоянная сила F действует на материальную точку m, переместившуюся по вектору AB из точки A в точку B. Обозначим через l и α геометрическую длину и угол направления вектора AB, проекции которого на оси X и Y пусть соответственно равны Δx и Δy. Через β, X, Y обозначим угол направления и проекции на оси силы F, через ω — угол между направлениями силы F и вектора AB. Если перенести начало координат в точку A, то Δx и Δy будут декартовы координаты точки B, а l и α — ее полярные координаты. Поэтому

$$\Delta x = l\cos\alpha, \quad \Delta y = l\cos\beta. \tag{1}$$



Черт. 192.

На том же основании

$$X = F\cos\beta, \quad Y = F\sin\beta. \tag{2}$$

Обозначим через R работу силы F на пути AB *). Как известно, эта работа определяется выражением

$$R = Fl\cos\omega = Fl\cos(\beta - \alpha) = Fl\cos\beta\cos\alpha + Fl\sin\beta\sin\alpha.$$

Принимая во внимание (1) и (2), заключаем:

Работа R постоянной силы, проекции которой на оси равны X и Y, при перемещении точки ее приложения на прямолинейный вектор определяется по формуле

$$R = X\Delta x + Y\Delta y, \tag{3}$$

где Δx и Δy — проекции на оси вектора перемещения.

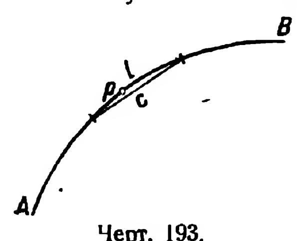
Предположим теперь, что сила F переменная и что точка ее приложения описывает криволинейный путь AB. Чтобы ввести понятие о работе этой силы на всем пути AB, введем сначала понятие об элементарной работе.

---

*) Надо остерегаться думать, что точка m перемещается из A в B под действием силы F. Точка может перемещаться из A в B под влиянием очень многих сил, одной из которых является сила F.

Пусть l — бесконечно малая дуга пути и c — ее хорда. На дуге l возьмем произвольно точку p, и через F' обозначим значение силы F в этой точке p.

Когда материальная точка m перемещается по l, то сила F вообще различна в различные моменты. Вместо нее возьмем фиктивную постоянную силу, равную F', а вместо дуги возьмем ее хорду. Работу силы F' на пути l назовем элементарной работой силы F.



Черт. 193.

***Определение*. Элементарной работой переменной силы F на бесконечно малой дуге l называется работа фиктивной постоянной силы F', равной значению силы F в какой-нибудь точке дуги l, при перемещении точки приложения силы по хорде дуги l.**

Работа силы F на всем пути AB принимается равной пределу суммы всех ее элементарных работ.

Пусть X и Y, проекции силы F, являются некоторыми функциями координат точки приложения силы.

Пусть

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y).$$

Делим путь AB на бесконечно малые части точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, координаты которых $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. В произвольно взятой точке (ξ_k, η_k) на дуге A_kA_{k+1} действует сила, проекции которой на оси

$$X_k = \varphi(\xi_k, \eta_k), \quad Y_k = \psi(\xi_k, \eta_k).$$

Ее работа вдоль хорды дуги A_kA_{k+1} равна

$$X_k \Delta x_k + Y_k \Delta y_k.$$

Это элементарная работа силы F. Берем сумму всех таких элементарных работ. Она равна

$$\sum (X_k \Delta x_k + Y_k \Delta y_k) = \sum (\varphi(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + \psi(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k).$$

Переходя к пределу, заключаем:

Работа силы R по пути AB равна криволинейному интегралу по этому пути от выражения $Xdx + Ydy$:

$$R = \int_{AB} (Xdx + Ydy), \tag{4}$$

где X и Y — проекции силы R на оси координат.

Полезно привыкнуть быстро выводить эту формулу, рассуждая так: при перемещении на бесконечно малую дугу ds, проекции которой на оси эквивалентны dx и dy, совершается элементарная работа $Xdx + Ydy$. Взяв сумму всех элементарных работ, получим (4).

§ 192. Основные теоремы о криволинейном интеграле.

Если

$$p = \varphi_1(x, y) d\psi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) d\psi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y) d\psi_n(x, y)$$

— данное диференциальное выражение, то интеграл от него по пути AB, для которого

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t),$$

выразится через обыкновенный:

$$\int\limits_{AB} p = \int\limits_{t_0}^{T} \Phi(t)\, dt, \tag{1}$$

где $p = \Phi(t)\, dt$.

Но если таким образом всякий криволинейный интеграл может быть представлен через обыкновенный, то изучение свойств данного криволинейного интеграла сводится к применению к нему свойств обыкновенного интеграла. Но чтобы выразить криволинейный интеграл через обыкновенный, необходимо предварительно иметь параметрическое представление пути. Путь же может быть дан и не параметрически. Поэтому желательно установить основные свойства криволинейных интегралов в таких формах, в которых не упоминалось бы о параметрическом представлении пути. Сделать это оказывается очень нетрудным. Для этого, разумея под p произвольно данное диференциальное выражение, нам достаточно воспользоваться равенством (1).

Теорема. **Если изменить направление пути на противоположное, то знак криволинейного интеграла изменится:**

$$\int\limits_{AB} p = -\int\limits_{BA} p,$$

потому что

$$\int\limits_{AB} p = \int\limits_{t_0}^{T} \Phi(t)\, dt = -\int\limits_{T}^{t_0} \Phi(t)\, dt = -\int\limits_{BA} p.$$

Теорема. **В криволинейном интеграле постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:**

$$\int\limits_{AB} Kp = K\int\limits_{AB} p,$$

потому что

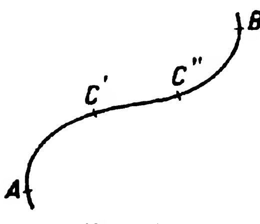
$$\int\limits_{AB} Kp = \int\limits_{t_0}^{T} K\Phi(t)\, dt = K\int\limits_{t_0}^{T} \Phi(t)\, dt = K\int\limits_{AB} p.$$

Теорема. **Интеграл по всему пути равен сумме интегралов по всем частям, на которые разбит путь.**

Пусть путь AB разделен на несколько частей, например на три, точками C' и C'', которым соответствуют значения параметра t' и t''. Требуется доказать, что

$$\int\limits_{AB} p = \int\limits_{AC'} p + \int\limits_{C'C''} p + \int\limits_{C''B} p.$$

Но это прямо следует из того, что



Черт. 194.

$$\int_{t_0}^{T} \Phi(t)\,dt = \int_{t_0}^{t'} \Phi(t)\,dt + \int_{t'}^{t''} \Phi(t)\,dt + \int_{t''}^{T} \Phi(t)\,dt.$$

***Теорема*. Криволинейный интеграл от суммы равен сумме интегралов слагаемых.**

Пусть p и q — два диференциальных выражения, для которых

$$p = \Phi(t)\,dt, \quad q = F(t)\,dt.$$

В таком случае имеем:

$$\int_{AB} (p+q) = \int_{t_0}^{T} \{\Phi(t) + F(t)\}\,dt = \int_{t_0}^{T} \Phi(t)\,dt + \int_{t_0}^{T} F(t)\,dt = \int_{AB} p + \int_{AB} q.$$

и теорема доказана.

На следующие две теоремы необходимо обратить особое внимание.

***Теорема*. Криволинейный интеграл от диференциала непрерывной функции равен разности между значениями функции в конце и начале пути:**

$$\int_{AB} d\Phi(x, y) = [\Phi(x, y)]_A^B = \Phi_B - \Phi_A. \tag{2}$$

Пусть $x = \lambda(t)$, $y = \mu(t)$, тогда

$$\Phi(x, y) = F(t).$$

Ясно, что

$$F(t_0) = \Phi_A, \quad F(T) = \Phi_B,$$

и так как

$$\int_{AB} d\Phi(x, y) = \int_{t_0}^{T} dF(t) = [F(t)]_{t_0}^{T}, \tag{3}$$

то имеем (2). Так как (3) верно только при условии непрерывности $F(t)$, то теорема имеет силу только для непрерывной функции $\Phi(x, y)$.

***Теорема об интегрировании по частям*. Если функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны, то**

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y) = [\varphi\psi]_A^B - \int_{AB} \psi(x, y)\,d\varphi(x, y), \tag{4}$$

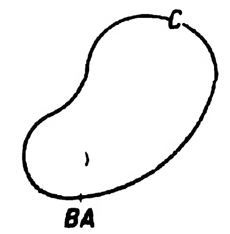
потому что

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y) = \int_{AB} \{d(\varphi\psi) - \psi d\varphi\} = [\varphi\psi]_A^B - \int_{AB} \psi\,d\varphi.$$

Часто приходится рассматривать интегралы по замкнутым путям. Необходимо отметить тот вид, который для них принимают равенства (2)

и (4). Пусть C — замкнутый контур. Какую-нибудь точку A на нем примем за начало пути. Конец его B совпадает с A. Поэтому в (2) и (4) теперь $\Phi_B = \Phi_A$, а потому

$$[\Phi]_A^B = 0, \quad [\varphi\psi]_A^B = 0,$$



Черт. 195.

и из (4) и (2) получается

Теорема. **Если контур C замкнутый, то**

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \varphi\, d\psi = -\int_{\overset{\frown}{AB}} \psi\, d\varphi, \quad \int_{\overset{\frown}{AB}} d\Phi = 0 \qquad (5)$$

при непременном условии непрерывности функций.

В частном случае имеем равенства:

$$\int_C y\, dx = -\int_C x\, dy, \quad \int_C dx = 0, \qquad (6)$$

которыми скоро нам придется воспользоваться.

§ 193. О вычислении криволинейного интеграла.

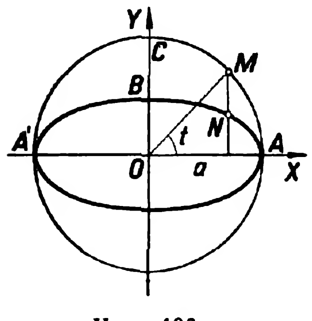
Фактически путь, по которому берется интеграл, обычно состоит из частей различных кривых. Поэтому хотя теоретически мы всегда можем мыслить, что он дан весь параметрически уравнениями

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t),$$

но фактически такое параметрическое представление мы имеем только в редких случаях. Поэтому равенством

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) = \int_{t_0}^{T} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y)$$

на практике приходится пользоваться редко. Обычно весь путь естественно распадается на несколько частей, каждая из которых представляется параметрически своими функциями, не теми, которыми представляются другие части. Поэтому вычисляют интеграл отдельно вдоль каждой части и потом берут сумму всех полученных результатов.



Черт. 196.

Положим, например, что путь интеграции такой: на большой оси эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

строится как на диаметре окружность. Если N — точка эллипса, продолжение ординаты которой пересекает окружность в точке M, то параметрически эллипс может быть представлен уравнениями

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \qquad (1)$$

то время как окружность представится уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t. \tag{2}$$

Пусть требуется вычислить интеграл:

$$G = \int\limits_{A'CBAO} y^2 dx + yx\,dy.$$

Путь естественно распадается на части $A'C$, CB, BA, AO.

Для части $A'C$ в уравнениях (2) параметр t меняется от π до $\frac{\pi}{2}$, а потому

$$\int\limits_{A'C} y^2 dx + yx\,dy = \int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} a^3(-\sin^3 t + \cos^2 t \sin t)\,dt = \frac{a^3}{3}.$$

На пути CB, как легко видеть, y меняется от a до b, и $x = 0$; поэтому

$$\int\limits_{CB} y^2 dx + yx\,dy = \int\limits_{a}^{b} 0 \cdot dy = 0.$$

На пути BA в уравнениях (1) параметр меняется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, а потому

$$\int\limits_{BA} y^2 dx + yx\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab^2(-\sin^3 t + \cos^2 t \sin t)\,dt = \frac{ab^2}{3}.$$

На пути AO x меняется от a до 0, но $y = 0$, а потому

$$\int\limits_{AO} y^2 dx + xy\,dy = 0.$$

Складывая все полученные результаты, найдем:

$$G = \frac{a(a^2 + b^2)}{3}.$$

§ 194. Частные случаи криволинейного интеграла.

Если путь AB определяется уравнением

$$y = f(x),$$

где функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), то, рассматривая x и y как функции параметра x, имеем

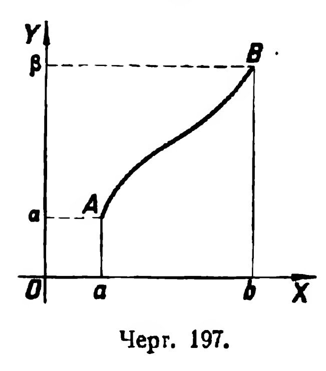
$$\int\limits_{AB} \varphi(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} \varphi(x, f(x))\,dx.$$

Точно так же, если путь AB представляем уравнением

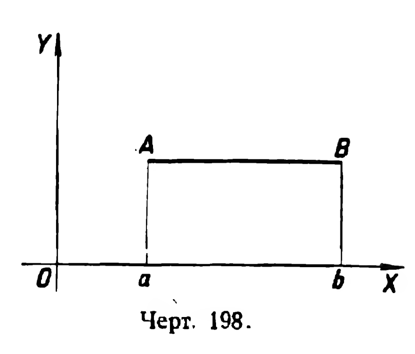
$$x=\omega(y),$$

где $\omega(y)$ — непрерывная функция в интервале (α, β), то

$$\int_{AB} \psi(x, y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(\omega(y), y)\, \omega'(y)\, dy.$$



Черт. 197.



Черт. 198.

Особо интересен случай, когда путь AB есть отрезок, параллельный оси X, для которого $y=c$. В таком случае

$$G=\int_{AB} \varphi(x, y)\, dx = \int_{a}^{b} \varphi(x, y)\, dx,$$

где y должен мыслиться как постоянное c. Мы видим, что

интеграл как функция параметра есть частный случай криволинейного интеграла, путь которого есть отрезок, параллельный оси X.

Необходимо отметить, что всякий обыкновенный интеграл

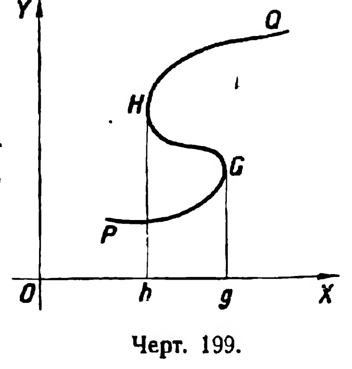
$$A=\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

всегда можно представить в форме криволинейного. Действительно, если AB — кривая, для которой

$$y=f(x),$$

то ясно, что

$$\int_{AB} y\, dx = \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$



Черт. 199.

Еще любопытней другой способ представления. Пусть P и Q — две точки с абсциссами a и b (черт. 199) на каком-нибудь пути $PGHQ$, соединяющем их. Предположим для простоты, что этот путь разбивается на три части PG, GH и HQ, для каждой из которых y — однозначная функция x. Пусть требуется вычислить криволинейный интеграл

$$K=\int_{PQ} f(x)\, dx.$$

Так как y явно не входит в подъинтегральное выражение, то ясно, что

$$\int_{PG} f(x)\,dx = \int_a^g f(x)\,dx,$$

$$\int_{GH} f(x)\,dx = \int_g^h f(x)\,dx,$$

$$\int_{HG} f(x)\,dx = \int_h^b f(x)\,dx.$$

Складывая, заключаем, что

$$\int_a^h f(x)\,dx = \int_{PQ} f(x)\,dx.$$

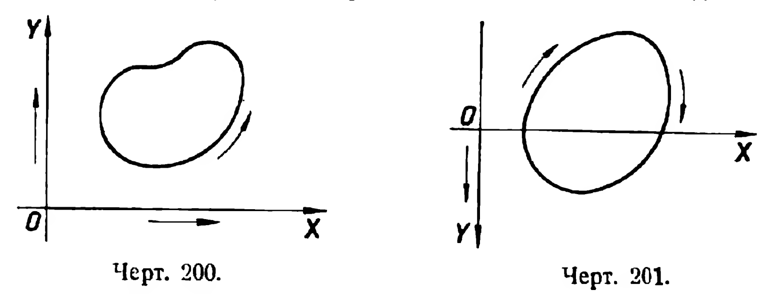
Следовательно, **интеграл**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

можно рассматривать как криволинейный интеграл, взятый по любому пути, началом и концом которого служат точки с абсциссами *a* и *b*.

§ 195. Теорема Грина — Римана.

Пусть A — площадь, ограниченная контуром C. Мы можем произвольно условиться принимать за положительное вращение луча вращение его или по часовой стрелке или против нее. Точно так же и для контура



Черт. 200. Черт. 201.

мы можем выбрать положительное направление в ту или иную сторону. При этом очевидно, что выбор положительного направления для контура может быть произведен совершенно независимо от выбора положительного направления для вращения луча. Но от этого произвола мы раз навсегда откажемся.

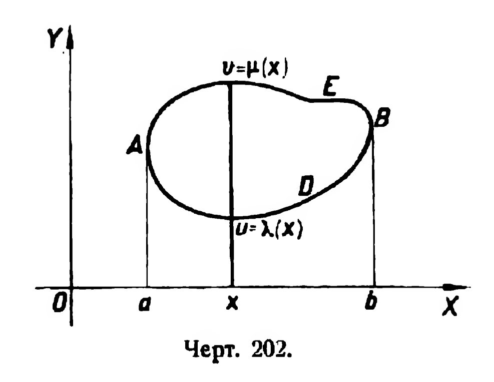
Когда выбрана декартова система координат, то за положительное вращение всегда считается вращение в том направлении, в котором должна повернуться на прямой угол ось абсцисс, чтобы ее положительное направление совпало с положительным направлением оси ординат.

За положительное направление замкнутого не пересекающегося с самим собой контура всегда принимается то направление,

в котором должна двигаться точка по контуру, чтобы ее вращение около любой достаточно к ней близкой точки, лежащей внутри контура, совершалось в положительном направлении.

Следовательно, если ось X направлена слева направо, а ось Y снизу вверх, то положительным вращением мы должны считать вращение против часовой стрелки, а положительным направлением контура то направление, идя по которому мы будем иметь обходимую площадь слева (черт. 200).

Если же ось X попрежнему направлена слева направо, но ось Y сверху вниз, то положительным вращением луча уже будет вращение по часовой стрелке, а положительным направлением контура то направление, идя по которому мы будем иметь обходимую площадь справа (черт. 201).



Черт. 202.

В дальнейшем будем считать ось X направленной слева направо, а ось Y снизу вверх. В таком случае положительным мы должны считать вращение против часовой стрелки и, чтобы итти по контуру в положительном направлении, ограниченная им площадь должна быть слева.

Пусть площадь S ограничена контуром C, который всякой прямой, параллельной оси Y, пересекается не более чем в двух точках. Ординату нижней его половины обозначим через u, а верхней через v, и пусть

$$u = \lambda(x), \quad v = \mu(x).$$

Если $x = a$ и $y = b$ — прямые, ограничивающие контур слева и справа, то, как известно,

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left\{ \int_{u=\lambda(x)}^{v=\mu(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Вообще говоря, внутренний интеграл в правой части не может быть вычислен. Но он легко вычисляется, если нам известна первообразная функция по y от подъинтегральной функции. Действительно, если

$$\int f(x, y)\, dy = \varphi(x, y) + C$$

и, следовательно,

$$f(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y},$$

то имеем

$$\int_{u=\lambda(x)}^{v=\mu(x)} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\, dy = \Big|_{y=u}^{y=v} \varphi(x, y) = \varphi(x, \mu(x)) - \varphi(x, \lambda(x)),$$

а потому

$$\iint_S \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b \varphi(x, \mu(x))\, dx - \int_a^b \varphi(x, \lambda(x))\, dx. \qquad (1)$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части. Так как

$$\int_a^b \varphi(x,\ \mu(x))dx=\int_a^b \varphi(x, y)\, dx, \text{ где } y=\mu(x),$$

то он есть интеграл по верхней половине контура в направлении от A к B. Точно так же второй интеграл есть интеграл по нижней половине того же контура, потому что

$$\int_a^b \varphi(x,\ \lambda(x))\, dx=\int_a^b \varphi(x,y)\, dx, \text{ где } y=\lambda(x).$$

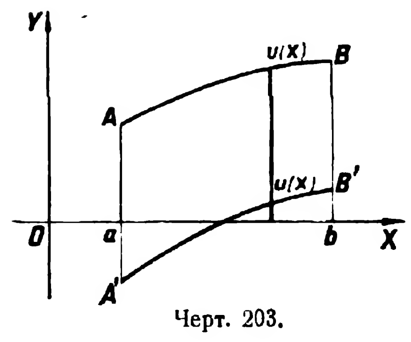
Следовательно,

$$\iint_S \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\, dx\, dy=\int_{AEB} \varphi(x, y)\, dx-\int_{ADB} \varphi(x, y)\, dx=$$

$$=-\int_{BEA} \varphi(x, y)\, dx-\int_{ADB} \varphi(x, y)\, dx=-\int_{ADBEA} \varphi(x, y)\, dx.$$

В правой части появился интеграл по всему контуру. Имеем равенство

$$\iint_S \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy=-\int_{\overleftarrow{C}} \varphi(x, y)\, dx, \qquad (2)$$



Черт. 203.

где стрелка у символа $\overleftarrow{C}$ указывает то направление, по которому берется интеграл по контуру.

Мы получили формулу, которой двойной интеграл выражается через интеграл по контуру. Это и есть формула Грина — Римана. Но она доказана нами только для площади, ограниченной контуром очень частной формы. Докажем ее справедливость и для площади, ограниченной контуром любой формы, но не пересекающимся с самим собой.

Пусть A — площадь первого типа, т. е. площадь, ограниченная слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$, снизу и сверху кривыми $u=u(x)$, $v=v(x)$. Имеем

$$\iint_A \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\, dx\, dy=\int_a^b \left\{\int_u^v \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\, dy\right\} dx=$$

$$=\int_a^b \{\varphi(x,\ v)-\varphi(x,\ u)\}\, dx=-\int_{BA} \varphi(x, y)\, dx-\int_{A'B'} \varphi(x,y)\, dx.$$

В правой части мы не имеем интеграла по всему контуру. Для этого недостает интегралов

$$\int\limits_{B'B} \varphi(x, y)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{AA'} \varphi(x, y)\, dx$$

по путям AA' и $B'B$. Но оба эти интеграла равны нулю, так как на этих путях $dx = 0$. Поэтому эти интегралы можно прибавить. Делая это, получим

$$\iint\limits_{A} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{BAA'B'B} \varphi(x, y)\, dx = -\int\limits_{\overleftarrow{C}} \varphi(x, y)\, dx, \tag{3}$$

т. е. получим прежнюю формулу.

Пусть теперь площадь A ограничена контуром C какой угодно формы. Разбиваем площадь A на части первого типа. Если C_1, C_2, C_3, ... — контуры, ограничивающие эти части, то по доказанному, применяя формулу для каждой части, имеем

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathrm{I}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy &= -\int\limits_{\overleftarrow{C_1}} \varphi\, dx, \\ \iint\limits_{\mathrm{II}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy &= -\int\limits_{\overleftarrow{C_2}} \varphi\, dx, \\ \iint\limits_{\mathrm{III}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy &= -\int\limits_{\overleftarrow{C_3}} \varphi\, dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Черт. 204.

Складываем все эти равенства. В левой части получим интеграл по всей площади A. Что касается интегралов правой части, то каждый из них состоит частью из интегралов по некоторой части контура C, а частью по вспомогательным прямым линиям. Так, например,

$$\int\limits_{\overleftarrow{C_3}} \varphi\, dx = \int\limits_{prq} \varphi\, dx + \int\limits_{qn} \varphi\, dx + \int\limits_{nsm} \varphi\, dx + \int\limits_{mp} \varphi\, dx.$$

Интегралы по вспомогательным линиям pm и qn равны нулю. Остаются только интегралы по дугам контура prq и nsm. Точно так же и от каждого интеграла в правой части останутся только интегралы по частям контура, притом взятых в положительном направлении. В своей сумме эти интегралы дадут интеграл по всему контуру, а потому мы снова получаем прежнее равенство

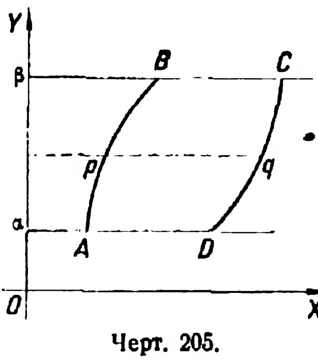
$$\iint\limits_{A} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\overleftarrow{C}} \varphi\, dx, \tag{5}$$

но уже доказанное для контура любой формы.

В связи с этим равенством естественно рассмотреть также двойной интеграл

$$\iint\limits_A \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy,$$

подынтегральная функция которого равна частной производной по x *от некоторой функции* $\psi(x, y)$, *непрерывной на площади* A. Предположим сначала, что площадь A есть площадь второго типа, т. е. площадь, ограниченная слева и справа кривыми



Черт. 205.

$$p = \lambda(y), \quad q = \mu(y),$$

где $\lambda(y)$ и $\mu(y)$ — непрерывные функции, снизу и сверху — прямыми $y = \alpha$ и $y = \beta$ (черт. 205). Имеем

$$\iint\limits_A \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_\alpha^\beta \left\{ \int\limits_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} \frac{\partial\psi}{\partial x} dx \right\} dy =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left\{ \Big/_{x=\lambda(y)}^{x=\mu(y)} \psi(x, y)\, dy = \int\limits_\alpha^\beta \psi(\mu, y)\, dy - \int\limits_\alpha^\beta \psi(\lambda, y)\, dy = \right.$$

$$= \int\limits_{DC} \psi(x, y)\, dy + \int\limits_{CB} \psi(x, y)\, dy + \int\limits_{BA} \psi(x, y)\, dy + \int\limits_{AD} \psi(x, y)\, dy.$$

В правой части мы прибавили два интеграла по путям CB и AD, так как оба эти интеграла равны нулю. В результате имеем

$$\iint\limits_A \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = + \int\limits_{\overleftarrow{C}} \psi(x, y)\, dy. \qquad (6)$$

Пока это равенство доказано только для площадей второго типа. В случае площади иной формы делим ее на части второго типа. Если C_1, C_2, C_3, ... — контуры этих частей (черт. 206), то по доказанному имеем

$$\iint\limits_{\text{I}} \frac{\partial\psi}{\partial x}\, dx\, dy = + \int\limits_{\overleftarrow{C_1}} \psi\, dy,$$

$$\iint\limits_{\text{II}} \frac{\partial\psi}{\partial x}\, dx\, dy = + \int\limits_{\overleftarrow{C_2}} \psi\, dy,$$

$$\iint\limits_{\text{III}} \frac{\partial\psi}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{\overleftarrow{C_3}} \psi\, dy.$$

. . . .

Складывая эти равенства, в левой части получим интеграл по всей площади. В правой же части из контуров C_1, C_2, C_3 интегралы по вспомогательным линиям равны нулю. Остальные же в сумме дадут интеграл по всему контуру. В результате имеем опять (6).

От вычитания из равенства (6) равенства (5) получается

Теорема Грина — Римана. **Если $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — функции, непрерывные на площади A, ограниченной контуром C, то**

$$\iint\limits_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\overleftarrow{C}} \varphi\, dx + \psi\, dy, \tag{7}$$

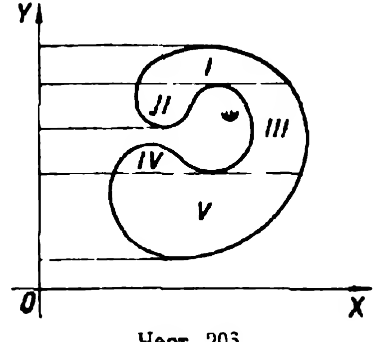
где интеграл по контуру берется в положительном направлении.

Равенство (7) содержит в себе оба равенства (5) и (6). Действительно, полагая в (7) $\psi = 0$, получим (5), а полагая $\varphi = 0$, будем иметь (6).

Но равенства (5) и (6) поражают своей несимметричностью. Она особенно бросается в глаза, если в них вместо φ и ψ написать одну и ту же функцию, например $f(x, y)$. Тогда получим

$$\iint\limits_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\overrightarrow{C}} f(x, y)\, dx, \tag{8}$$

$$\iint\limits_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{\overleftarrow{C}} f(x, y)\, dy. \tag{9}$$



Черт. 203.

Казалось бы, так как по существу x и y равноправны, то в правых частях должен быть один и тот же знак.

Но эта кажущаяся несимметричность в действительности есть только внешнее выражение полной внутренней симметрии. В самом деле, в равенстве (8) интеграл по контуру берется в том направлении, в котором надо вращать ось X на прямой угол для совпадения ее направления с направлением оси Y. Поэтому именно по симметрии в равенстве (9) надо интеграл по контуру брать в том направлении, в котором должна вращаться на прямой угол уже ось Y до совпадения с осью X, а не ось X до совпадения с осью Y, т. е. надо взять его в направлении, противоположном направлению в равенстве (8). Делая это, мы можем переписать равенства (8) и (9) в такой форме:

$$\iint\limits_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\overleftarrow{C}} f\, dx, \qquad \iint\limits_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = -\int\limits_{\overrightarrow{C}} f\, dy,$$

и теперь очевидна их полная симметричность.

Формула Римана в большом употреблении в механике и физике. Мы здесь рассмотрим одно ее применение к вычислению площадей. Если A — площадь, ограниченная замкнутым, не пересекающимся с самим собой контуром C, то

$$A = \iint\limits_A 1 \cdot dx\, dy.$$

Полагая теперь в равенстве

$$\iint_A \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\overleftarrow{C}}\varphi\,dx+\psi\,dy$$

сначала $\psi=x$, $\varphi=0$, получим $A=+\int_{\overleftarrow{C}}x\,dy$; полагая же $\psi=0$, $\varphi=-y$, найдем, что $A=-\int_{\overleftarrow{C}}x\,dy$; наконец, принимая, что $\psi=x$, $\varphi=-y$, получим $2A=\int_{\overleftarrow{C}}x\,dy-y\,dx$.

Из этих равенств следует

Теорема. **Если A — площадь, ограниченная непересекающимся с самим собою контуром C, то**

$$A=\int_{\overleftarrow{C}}x\,dy,\quad A=-\int_{\overleftarrow{C}}y\,dx,\quad A=\frac{1}{2}\int_{\overleftarrow{C}}x\,dy-y\,dx.$$

Эти формулы часто дают возможность быстро и просто вычислять площади некоторых фигур. Вычислим, например, площадь A эллипса с осями a и b. Возьмем его уравнения в параметрической форме: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Когда t меняется от 0 до 2π, то эллипс обегается точкой как раз в положительном направлении. Имеем

$$A=\frac{1}{2}\int_{\overleftarrow{C}}x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\pi ab.$$

§ 196. Заключение.

1. По определению

$$\int_{AB}\varphi(x,y)d\psi(x,y)=\int_{t_0}^{T}\varphi(x,y)\,d\psi(x,y),$$

где в правой части x и y рассматриваются как те функции параметра, которыми определен путь.

Криволинейный интеграл равен пределу соответствующей интегральной суммы:

$$\int_{AB}\varphi(x,y)\,d\psi(x,y)=\lim\sum_{AB}\varphi(\xi_k,\eta_k)\,\Delta\psi(x_k,y_k).$$

2. Теорема Грина—Римана:

$$\iint_A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\overleftarrow{C}}\varphi\,dx+\psi\,dy.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ.

§ 197. Признаки сходимости обобщенных интегралов.

Вопрос о существовании обобщенного интеграла легко решается, когда мы можем вычислить соответствующий неопределенный интеграл. Но так как эта возможность представляется только в редких случаях, то возникает задача о нахождении методов, которые давали бы возможность заключать о существовании или несуществовании обобщенного интеграла без вычисления неопределенного интеграла, а только из свойств подъинтегральной функции, т. е. возникает задача о нахождении так называемых признаков существования интегралов.

Если интервал интеграции (a, b) конечен и функция $f(x)$ прерывна внутри него только в точках $c_1, c_2, \ldots c_n$, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx. \quad (1)$$

Следовательно, задача о признаках существования интеграла от функций, прерывных внутри интервала, сводится к задаче о признаках существования интеграла от функций, прерывных только на концах интервала.

Но если функция $f(x)$ прерывна на обоих концах интервала (a, b), внутри же него непрерывна, и если c — произвольно взятая точка внутри этого интервала, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

и интеграл левой части существует, если существуют интегралы правой части. Но так как каждый из этих интегралов есть интеграл от функции, прерывной только на одном конце интервала, то мы видим, что задача о существовании интеграла от прерывной функции в том случае, когда интервал интеграции конечен, всегда может быть приведена к задаче о существовании интеграла от функции, прерывной только на одном конце интервала.

Далее, так как по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

а потому интеграл левой части существует только при условии, что существуют интегралы правой части, то задача о существовании интегралов

с двумя бесконечными пределами сводится к задаче о существовании *интегралов только с одним бесконечным пределом.*

В результате мы видим, что для решения вопроса о существовании обобщенных интегралов мы должны исследовать вопрос о существовании интегралов только двух типов: интегралов от функций, прерывных только на одном конце интервала интеграции, и интегралов только с одним бесконечным пределом.

Пусть же подъинтегральная функция $f(x)$ в интервале (a, b) прерывна только при верхнем пределе. Возможны два случая: или $a < b$, или $a > b$. Оба эти случая будем рассматривать одновременно. По определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

Черт. 207.

где ε положительно, если $a < b$, и отрицательно, если $a > b$. Пусть c — точка внутри интервала (a, b). Эта точка может быть взята как угодно близко к точке b, но не должна с нею совпадать. Для сокращения письма положим

$$G = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad H = \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

и возьмем ε настолько малым, чтобы точка $b - \varepsilon$ была внутри интервала (c, b). Так как функция $f(x)$ непрерывна на всем интервале $(a, b - \varepsilon)$, то

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Переходим к пределу, предполагая, что ε бесконечно умаляется. Имеем:

$$\lim G = \int_a^c f(x)\,dx + \lim H. \tag{3}$$

Следовательно, если H имеет конечный предел, то и G имеет тоже конечный предел. Обратно, если G имеет конечный предел, то конечный предел имеет и H. Следовательно, интегралы G и H одновременно или имеют конечные пределы или их не имеют. Иными словами это значит, что обобщенные интегралы

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad B = \int_c^b f(x)\,dx$$

всегда существуют одновременно, причем точка c может быть взята как угодно близко к b. Следовательно,

если функция $f(x)$ прерывна только в точке b, то существование или несуществование интеграла на всем интервале (a, b) зависит от его существования или несуществования в области точки b, т. е. в любом достаточно малом интервале (c, b).

Эта область будет лежать слева от b, если $a < b$ и справа, если $a > b$.

То же заключение справедливо и для интегралов с бесконечным пределом. Условимся в следующем способе выражения:

Если какое-либо утверждение справедливо о всяком интервале $(c, +\infty)$, лишь бы только c было достаточно велико, то мы будем говорить, что данное утверждение справедливо относительно области точки $+\infty$.

Если же какое-либо утверждение справедливо о всяком интервале $(c, -\infty)$, где отрицательное число c достаточно велико по абсолютной величине, то мы будем говорить, что данное утверждение справедливо относительно всякой области точки $-\infty$.

Пусть c — как угодно большое число и $b > c$. Имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если заставим b стремиться к $+\infty$, то оба интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

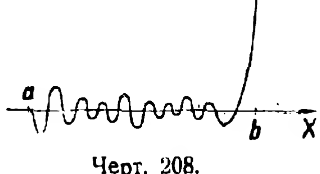
будут одновременно иметь конечные пределы или не иметь их, а потому интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

будут одновременно существовать или не существовать. Следовательно, существование или несуществование интеграла с пределом $+\infty$ зависит от его существования или несуществования в области точки $+\infty$.

То же, очевидно, справедливо, когда пределом служит $-\infty$.

Если мы теперь условимся в этой главе называть критическими точками точки прерывности функции, а также точки $+\infty$ и $-\infty$, то мы видим, что наши исследования приводят нас к следующему общему выводу:



Черт. 208.

Существование или несуществование обобщенного интеграла на всем интервале зависит от существования или несуществования его в области каждой критической точки.

Следовательно,

существование обобщенного интеграла зависит не от свойств функции на всем интервале, но только от свойств функции в области каждой критической точки.

Этот результат чрезвычайно важен. На всем интервале функция может обладать значительно более сложными свойствами, чем в области какой-либо точки. Так, например, функция, изображенная кривой на чертеже 208, принимает во всем интервале как положительные, так и отрицательные значения, но в области точки b она только положительна.

Заметим теперь, что если функция $f(x)$ в области точки b сохраняет один и тот же знак, то при решении вопроса о существовании интеграла

мы всегда можем считать ее положительной, потому что если точка c взята достаточно близко к b, то ясно, что интегралы

$$\int_c^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^b -f(x)\,dx$$

всегда существуют или не существуют одновременно. Поэтому если бы функция $f(x)$ в области рассматриваемой точки была отрицательна, то мы вместо первого интеграла рассматривали бы второй. Приняв это во внимание, предположим, что в интеграле

$$A=\int_a^b \psi(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{4}$$

функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в области критической точки b сохраняют один и тот же знак. Согласно только что сказанному будем их считать положительными. Далее предположим, что функция $\psi(x)$ имеет конечный предел k, не равный нулю, и что интеграл

$$B=\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{5}$$

a c b
b-ε X

Черт. 209.

существует. Докажем, что в таком случае существует и интеграл (4).

Предполагаем сначала, что $a<b$, и возьмем точку c настолько близко к b, чтобы функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ на интервале (c, b) были положительны. Взяв ε достаточно малым, рассмотрим интегралы

$$G=\int_c^{b-\varepsilon} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \text{и} \quad H=\int_c^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

По условию функция $\psi(x)$ положительна в точке b и имеет предел $k\neq 0$. Поэтому если возьмем два таких положительных числа m и M, что

$$m<k<M, \tag{7}$$

то c можно взять настолько близко к b, чтобы для всякого x в интервале (c, b) имели место неравенства

$$m<\psi(x)<M.$$

Считаем, что c взято таким. Тогда, так как $\varphi(x)$ положительна, имеем

$$m\,\varphi(x)<\psi(x)\,\varphi(x)<M\varphi(x),$$

а потому

$$m\int_c^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx<\int_c^{b-\varepsilon} \psi(x)\,\varphi(x)dx<M\int_c^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx, \tag{8}$$

или согласно (6)

$$mH<G<MH. \tag{9}$$

Так как $c<b-\varepsilon$ и подъинтегральные функции положительны, то интегралы H и G, когда $\varepsilon\to 0$, необходимо возрастают, а потому имеют

пределы; весь вопрос только, какими будут эти пределы, конечными или бесконечными. Из (9) имеем

$$m \lim H \leqq \lim G \leqq M \lim H. \qquad (10)$$

Если теперь интеграл (5) существует, то $\lim H$ и $\lim G$ конечны, т. е. интеграл (4) существует. Если же интеграл (5) не существует, то $\lim H = +\infty$, а потому $\lim G$ тоже бесконечен, т. е. интеграл (4) не существует. Итак, интеграл (4) существует или не существует одновременно с интегралом (5). Это, если $a < b$. Но если бы имели $a > b$, то вместо интегралов (6) мы взяли бы интегралы

$$\int_{b+\varepsilon}^{c} \psi(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{b+\varepsilon}^{c} \varphi(x)\,dx,$$

а потому вместо (8) имели бы

$$m\int_{b+\varepsilon}^{c} \varphi(x)\,dx \leqq \int_{b+\varepsilon}^{c} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq M\int_{b+\varepsilon}^{c} \varphi(x)\,dx;$$

остальной ход рассуждения остался бы неизменным.

Если же в (4) верхний предел бесконечен: $b = +\infty$, то мы тогда взяли бы c достаточно большим и вместо (8) имели бы

$$m\int_{c}^{b} \varphi(x)\,dx < \int_{c}^{b} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx < M\int_{c}^{b} \varphi(x)\,dx.$$

Заставляя b стремиться к $+\infty$, получили бы прежний результат. Следовательно, имеем теорему:

Черт. 210.

Если в области конечной или бесконечной критической точки b функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ сохраняют один и тот же знак и если функция $\psi(x)$ имеет в точке b конечный предел, не равный нулю, то интегралы

$$A = \int_{a}^{b} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \text{и} \quad B = \int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx \qquad (11)$$

существуют или не существуют одновременно.

Очевидно значение этой теоремы. Вместо интеграла A мы можем рассматривать более простой интеграл B, т. е. в интеграле A можем не обращать внимания на множитель $\psi(x)$.

Перейдем теперь к выводу признаков сходимости. Предварительно заметим следующее: если функция $f(x)$ в интервале $(c, +\infty)$ всегда остается больше некоторого положительного числа m: $f(x) > m$, то

$$\int_{c}^{b} f(x)\,dx > \int_{a}^{b} m\,dx, \quad \text{т. е.} \quad > m(b-a),$$

и если $b \to +\infty$, то правая часть, а потому и левая бесконечно возрастают. Следовательно, интеграл

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (12)$$

не существует. Поэтому если он существует, то функция $f(x)$ не может оставаться при всяком x больше одного и того же положительного числа m, как бы мало ни было это число. Иными словами это значит, что функция $f(x)$ должна принимать как угодно малые значения. Поэтому *при вопросе о существовании интеграла* (12) *мы ограничимся только тем* случаем, когда предел функции $f(x)$ в точке $+\infty$ равен нулю, т. е. когда при бесконечном возрастании x функция $f(x)$ бесконечно умаляется.

Но если, когда x бесконечно возрастает, функция бесконечно умаляется, то возникает вопрос о порядке ее малости. Но говорить о порядке малости одной величины можно только по отношению к другой величине. Естественно, когда x бесконечно возрастает, быстроту умаления функции $f(x)$ сравнивать с быстротой умаления функции $\frac{1}{x}$, т. е. рассматривать предел отношения

$$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^m} = x^m f(x)$$

при различных показателях m. Поэтому введем

***Определение*. Если, когда x стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, функция x бесконечно умаляется, то говорят, что ее порядок малости равен n, если**

$$\lim x^n f(x) = k,$$

где k конечно и не нуль, и что этот порядок больше n, если

$$\lim x^n f(x) = 0,$$

и меньше n, если

$$\lim x^n f(x) = \infty.$$

Подобным же образом, если функция $f(x)$ в точке b обращается в ∞:

$$\lim_{x \to b} f(x) = \infty,$$

то естественно рассматривать порядок ее бесконечности относительно функции $\frac{1}{x-b}$, т. е. рассматривать предел отношения вида

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{(x-b)^n}} = (x-b)^n f(x).$$

***Определение*. Если функция $f(x)$ в точке b обращается в бесконечность, то говорят, что в этой точке ее порядок бесконечности равен n, если**

$$\lim_{x \to b} (x-b)^n f(x) = k,$$

где k конечно и не нуль. Этот порядок меньше n, если

$$\lim_{x \to b} (x-b)^n f(x) = 0,$$

и больше n, если

$$\lim_{x \to b} (x-b)^n f(x) = \infty.$$

В определении предполагалось, что x приближается к b справа; если бы x приближался слева, то мы имели бы $x < b$, и при n дробном или несоизмеримом надо вместо $x-b$ брать $b-x$, чтобы избежать мнимых чисел.

Пусть теперь данная функция $f(x)$ прерывна в интервале (a, b) только в точке b, обращаясь в ней в бесконечность, и пусть

$$\lim (x-b)^n f(x) = k, \quad \text{причем} \quad k \neq 0 \quad \text{и} \quad \neq \infty.$$

Следовательно, порядок бесконечности функции $f(x)$ в точке b равен n.

Взяв точку c достаточно близко к b, рассматриваем интеграл

$$G = \int_c^b f(x)\,dx. \tag{13}$$

Переписав его в такой форме:

$$G = \int_c^b (b-x)^n f(x) \cdot \frac{dx}{(b-x)^n},$$

мы представим подъинтегральную функцию как произведение двух функций:

$$\psi(x) = (b-x)^n f(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \frac{1}{(b-x)^n},$$

а потому можем к нему применить доказанную выше теорему, так как функция $\varphi(x)$ в области точки b сохраняет один и тот же знак и, кроме того, функция $\psi(x)$ имеет конечный предел, не равный нулю. Заключаем, что интеграл (13) существует или не существует одновременно с интегралом

$$\int_c^b \frac{dx}{(b-x)^n}.$$

Но легко убедиться, что этот интеграл с у щ е с т в у е т т о л ь к о п р и $n < 1$ и н е с у щ е с т в у е т п р и $n \geqq 1$. Но если он существует, то существует и интеграл (13), а потому

Теорема. **Интеграл**

$$\int_c^b f(x)\,dx \tag{14}$$

существует, если порядок функции $f(x)$ в точке b меньше единицы; если же порядок больше или равен единице, то интеграл не существует.

Рассмотрим, например, такой интеграл:

$$A=\int_0^1 \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}. \tag{15}$$

Подъинтегральная функция

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

обращается в ∞ в точках $x=0$ и $x=1$. Ищем ее порядок бесконечности в этих точках. Так как

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to 0}\left\{\sqrt{\frac{x}{\sin x}}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right\}=1,$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\frac{2}{3}} f(x)=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right\}=\frac{\cos 1}{\sqrt{\sin 1}},$$

то эти порядки соответственно равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$. Так как они меньше единицы, то интеграл (15) существует.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

с бесконечным пределом и предположим, что функция $f(x)$ в точке $+\infty$ имеет порядок малости, равный n. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n f(x)=k, \quad \text{где} \quad k\neq 0 \quad \text{и} \quad \neq\infty.$$

Имеем

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx=\int_c^{+\infty} x^n f(x)\cdot\frac{dx}{x^n}. \tag{16}$$

В правой части подъинтегральная функция есть произведение двух функций: функции $x^n f(x)$, предел которой конечен, и функции $\frac{1}{x^n}$, которая сохраняет один и тот же знак. Следовательно, интеграл (16) существует или не существует одновременно с интегралом

$$\int_c^{+\infty}\frac{dx}{x^n}. \tag{17}$$

Но если $n<1$, то

$$\int_c^{+\infty}\frac{dx}{x^n}=\Big/_{c}^{+\infty}\frac{1}{1-n}x^{1-n}=+\infty;$$

если $n=1$, то

$$\int_c^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln(+\infty)-\ln c=+\infty,$$

если $n>1$, то

$$\int_c^{+\infty}\frac{dx}{x^n}=\left|-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\right|_c^{+\infty}=+\frac{1}{(n-1)c^{n-1}}.$$

Только в последнем случае, т. е. при $n>1$, интеграл (17), а потому и интеграл (16) существуют. Следовательно, интеграл

$$\int_c^{+\infty}f(x)\,dx \tag{18}$$

существует, если порядок малости функции $f(x)$ в точке $+\infty$ больше единицы. Если же этот порядок меньше или равен единице, то интеграл не существует.

Рассмотрим, например, интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^3+5}{3x^5+x+7}\,dx. \tag{19}$$

Обозначая подъинтегральную функцию через $f(x)$, имеем

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x^4}+\frac{7}{x^5}},$$

а потому ясно, что

$$\lim_{x\to\infty}(x^2f(x))=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, порядок больше единицы, а потому интеграл существует.

§ 198. Эйлеровы интегралы.

Эйлеровым интегралом первого рода называется интеграл

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Если $p<0$, то подъинтегральная функция бесконечна при $x=0$; она бесконечна при $x=1$, если $q<1$. Поэтому возникает вопрос о существовании этого интеграла. Полагая

$$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1},$$

имеем:

$$\lim_{x\to 0}x^{1-p}f(x)=1,\quad \lim_{x\to 1}(1-x)^{1-q}f(x)=1.$$

Следовательно, порядок бесконечности функции $f(x)$ равен $1-p$ в точке $x=0$ и $1-q$ в точке $x=1$. Поэтому интеграл существует тогда и только тогда, когда эти порядки меньше единицы, т. е. когда p и q положительны. Этот интеграл обозначается так: $B(p, q)$, что читается: бэта от p и q.

Эйлеровым интегралом второго вида называется интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$$

Обозначается он так: $\Gamma(p)$, что читается: гамма от p. Если $p<1$, то порядок бесконечности подъинтегральной функции в точке $x=0$ равен $1-p$, а так как интеграл существует только в том случае, когда этот порядок меньше единицы, т. е. когда $1-p<1$, то в области точки $x=0$ интеграл существует тогда и только тогда, когда p положительно. В области $x=+\infty$ интеграл всегда существует, потому что при всяком m

$$\lim_{x\to+\infty} x^m e^{-x}=0,$$

и, следовательно, порядок малости подъинтегральной функции больше единицы.

Итак, при положительных показателях, и только при положительных, эйлеровы интегралы существуют. Возьмем первый из них:

$$B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \tag{1}$$

Полагая $x=1-y$, получаем

$$B(p, q)=-\int_1^0 y^{q-1}(1-y)^{p-1}dy.$$

Переставив в правой части пределы интеграла и заменив символ y опять символом x, будем иметь:

$$B(p, q)=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx.$$

Следовательно,

$$B(p, q)=B(q, p). \tag{2}$$

Таким образом, оказывается, что функция $B(p, q)$ симметрична относительно своих аргументов.

Сделаем теперь такую подстановку:

$$x=\frac{z}{1+z}, \quad z=\frac{x}{1-x}.$$

Когда x меняется от нуля до единицы, то z меняется от нуля до $+\infty$, а потому после подстановки найдем, что

$$B(p, q)=\int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}dz}{(1+z)^{p+q}}. \tag{3}$$

Мы скоро воспользуемся этой формулой. Теперь же рассмотрим эйлеров интеграл второго рода:

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx. \tag{4}$$

Прежде всего имеем:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=-\Big/_{x=0}^{x=+\infty} e^{-x}=1,$$

а потому

$$\Gamma(1)=1. \tag{5}$$

Это можно считать первым свойством функции $\Gamma(p)$. Далее, интегрируя по частям, мы последовательно имеем:

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx=-\int_0^{+\infty} x^p de^{-x}=$$

$$=-[x^p e^{-x}]_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx,$$

и так как

$$\lim_{x\to+\infty} x^p e^{-x}=0,$$

то

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p). \tag{6}$$

Это — второе свойство функции Γ.

Пусть теперь m — целое положительное число. Применяя равенство (6) несколько раз, мы имеем:

$$\Gamma(m+1)=m\Gamma(m),$$
$$\Gamma(m)=(m-1)\Gamma(m-1),$$
$$\Gamma(m-1)=(m-2)\Gamma(m-2),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\Gamma(3)=2\Gamma(2),$$
$$\Gamma(2)=1\Gamma(1),$$
$$\Gamma(1)=1.$$

Перемножив все эти равенства, заключаем, что

$$\Gamma(m+1)=1\cdot2\cdot3\dots(m-1)\,m=m! \tag{7}$$

Это — третье свойство Γ. Замечательно, что в правой части стоит выражение, которое имеет смысл только при m целом.

Возвратимся к основному равенству (4). Полагая $x=ay$, где a — постоянная положительная величина, получим:

$$\Gamma(p)=a^p\int_0^{+\infty} e^{-ay}y^{p-1}dy. \tag{8}$$

откуда

$$\frac{1}{a^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ay}y^{p-1}dy. \tag{9}$$

Заменим здесь a через $1+z$, а p — через $p+q$. Получим

$$\frac{1}{(1+z)^{p+q}}=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+z)y}\,y^{p+q-1}dy. \tag{10}$$

Возьмем теперь равенство (3). Благодаря (10) это равенство можно переписать в такой форме:

$$B(p, q)=\int\limits_0^{+\infty}\left\{\frac{z^{p-1}}{\Gamma(p+q)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+z)y}\,y^{p+q-1}dy\right\}dz,$$

или, вынося и подводя постоянные множители под знак интеграла:

$$B(p, q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int\limits_0^{+\infty}\left\{\int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+z)y}\,y^{p+q-1}\,z^{p-1}\,dy\right\}dz.$$

Изменяем порядок интеграции. Имеем:

$$B(p, q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int\limits_0^{+\infty}\left\{\int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+z)y}\,y^{p+q-1}\,z^{p-1}\,dz\right\}dy.$$

Или, вынося постоянный множитель,

$$B(p, q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int\limits_0^{+\infty}\left\{e^{-y}\,y^{p+q-1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-zy}\,z^{p-1}\,dz\right\}dy. \tag{11}$$

В равенстве (8) вместо a напишем y, а y заменим буквой z. Получим:

$$\Gamma(p)=y^p\int\limits_0^{+\infty} e^{-yz}z^{p-1}dz,$$

а потому из (11)

$$B(p, q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int\limits_0^{+\infty}\Gamma(p)\,e^{-y}\,y^{q-1}\,dy=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-y}\,y^{q-1}\,dy,$$

и окончательно неожиданное равенство

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

которым функция B выражается через функцию Г. На этом примере мы видим, какова мощь теорем о подстановке и диференцировании и интегрировании по параметру.

§ 199. Строка Тейлора.

В *теореме об интегрировании по частям:*

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = [\varphi(x)\,\psi(x)]_a^b - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x),$$

неявно содержится строка Тейлора.

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная в интервале (a, b) вместе с своими производными до n-го порядка включительно.

Так как

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$

то

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Замечая, что

$$dx = d(x - b),$$

перепишем эти равенства в такой форме:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,d(x - b)$$

и проинтегрируем правую часть по частям. Так как

$$[f'(x)(x - b)]_a^b = (b - a)f'(a),$$

то получим

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a) + \int_a^b (b - x)f''(x)\,dx. \qquad (1)$$

Но интеграл в правой части тоже можно проинтегрировать по частям. Имеем:

$$\int_a^b (b - x)f''(x)\,dx = -\frac{1}{1\cdot 2}\int_a^b f''(x)\,d(b - x)^2 =$$

$$= \frac{(b - a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \frac{1}{1\cdot 2}\int_a^b (b - x)^2 f'''(x)\,dx,$$

а потому

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \frac{1}{1\cdot 2}\int_a^b (b - x)^2 f'''(x)\,dx$$

и так как

$$\frac{1}{2!}\int_a^b (b - x)^2 f'''(x)\,dx = -\frac{1}{3!}\int_a^b f'''(x)\,d(b - x)^3 =$$

$$= \frac{(b - a)^3}{3!} f'''(a) + \frac{1}{3!}\int_a^b (b - x)^3 f^{IV}(x)\,dx,$$

то

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+$$

$$+\frac{1}{3!}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx.$$

Интеграл в правой части тоже можно проинтегрировать по частям и т. д. Вообще замечая, что

$$\frac{1}{k!}\int_a^b (b-x)^k f^{(k+1)}(x)\,dx=-\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b f^{(k+1)}(x)\,d(b-x)^{k+1},$$

и интегрируя по частям, получаем равенство

$$\frac{1}{k!}\int_a^b (b-x)^k f^{(k+1)}(x)\,dx=\frac{(b-a)^{k+1}f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}+$$

$$+\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-x)^{(k+1)} f^{(k+2)}(x)\,dx. \qquad (2)$$

Полагая последовательно k равным $1, 2, 3, \ldots$, мы получаем равенства

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\int_a^b (b-x)f''(x)\,dx,$$

$$\int_a^b (b-x)f'(x)\,dx=\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{1}{2!}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)\,dx,$$

$$\frac{1}{2!}\int_a^b (b-x)^2 f''(x)\,dx=\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+\frac{1}{3!}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx,$$

$$\frac{1}{3!}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx=\frac{(b-a)^4}{4!}f^{IV}(a)+\frac{1}{4!}\int_a^b (b-x)^4 f^{V}(x)\,dx,$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_a^b (b-x)^{n-2} f^{(n-1)}(x)\,dx=\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx.$$

Складывая их, найдем

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+R_n, \quad (3)$$

где

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^b (b-x)^{n-1}f^{(n)}(x)\,dx. \quad (4)$$

Но это и есть не что иное, как строка Тейлора.

Представим ее в привычной форме. Для этого сначала в интеграле правой части заменим символ x как символ интеграции символом u, а величины a и b — через x и $x+h$. Получим:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+R_n, \quad (5)$$

где

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_x^{x+h}(x+h-u)^{(n-1)}f^{(n-1)}(u)\,du. \quad (6)$$

Этот интеграл нетрудно представить в более простом виде. Прежде всего сама собою напрашивается подстановка

$$u=x+z.$$

Когда u изменяется от x до $x+h$, то z изменяется от нуля до h, а потому

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^h (h-z)^{n-1}f^{(n)}(x+z)\,dz. \quad (7)$$

Теперь пределы интеграла уже не зависят от x. Нетрудно сделать так, чтобы они не зависели также и от h. Полагаем

$$z=ht.$$

Когда z изменяется от нуля до h, то t изменяется от нуля до единицы, а потому

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{n-1}f^{(n)}(x+ht)\,dt, \quad (8)$$

и в правой части мы имеем интеграл уже с постоянными пределами. В результате получаем теорему:

Если данная функция $f(x)$ вместе с производными до n-го порядка включительно непрерывна в интервале $(x, x+h)$, то

$$\boldsymbol{f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+R_n,}$$

где

$$\boldsymbol{R_n=\frac{h^n}{(n-1)}\int\limits_0^1 (1-t)^{n-1}f^{(n)}(x+ht)\,dt.} \quad (9)$$

Такой вывод строки Тейлора, интересный сам по себе, приобретает особое значение благодаря тому, что мы получили новую форму для остатка. Эта форма часто очень удобна при теоретических исследованиях. Преимущество ее перед формами Коши и Лагранжа в том, что в нее не входит неизвестная величина θ. Но из нее нетрудно получить обычные формы остатка. Пусть p — произвольно взятое положительное число. Имеем

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-p} f^{(n)}(x+ht)\cdot(1-t)^{p-1}\,dt,$$

и так как множитель $(1-t)^{p-1}$ положителен, пока t меняется в пределах от 0 до 1, то по обобщенной теореме о среднем значении интеграла

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(x+h\theta)\int_0^1 (1-t)^{p-1}\,dt,$$

где $0 < \theta < 1$. Вычисляя же интеграл правой части, находим

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(x+\theta h)}{(n-1)!\,p},$$

т. е. мы получили остаток в форме Шломильха.

§ 200. Формула Валлиса.

Вычислим следующий интеграл:

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Индекс символа u_n должен показывать, в какой степени в подынтегральном выражении берется функция $\sin x$. Показатель n считаем целым положительным числом. Имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d\cos x.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\left[\sin^{n-1} x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

В правой части снова появился искомый интеграл. Перенося его в левую часть, находим:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx,$$

или, пользуясь сокращенным обозначением:

$$u_n = \frac{n-1}{n}\,u_{n-2}. \qquad (1)$$

Полученная формула приводит искомый интеграл к интегралу того же типа, но с показателем, уменьшенным на две единицы. Применяя эту формулу несколько раз и понижая каждый раз показатель на две единицы, мы придем, наконец, к одному из следующих интегралов, которые получим, полагая $n=0$ или $n=1$:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1,$$

смотря по тому, равен ли первоначальный n четному числу или нечетному. Вычислим u_n.

Если n — четное ($n=2m$), то

$$u_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\,u_{2m-2},$$
$$u_{2m-2} = \frac{2m-3}{2m-2}\,u_{2m-4},$$
$$u_{2m-4} = \frac{2m-5}{2m-4}\,u_{2m-6},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_2 = \frac{1}{2}\,u_0$$
$$u_0 = \frac{\pi}{2}$$

если n — нечетное ($n=2m-1$), то

$$u_{2m-1} = \frac{2m-2}{2m-1}\,u_{2m-3},$$
$$u_{2m-3} = \frac{2m-4}{2m-3}\,u_{2m-5},$$
$$u_{2m-5} = \frac{2m-6}{2m-5}\,u_{2m-7},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_3 = \frac{2}{3}\,u_1$$
$$u_1 = 1.$$

Перемножая между собой равенства каждой системы, мы после очевидных сокращений получаем:

$$u_{2m} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2m-5)(2m-3)(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots(2m-4)(2m-2)(2m)}, \qquad (2)$$

$$u_{2m-1} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots(2m-6)(2m-4)(2m-2)}{3\cdot5\cdot7\cdot9\ldots(2m-5)(2m-3)(2m-1)}. \qquad (3)$$

Весьма красивые выражения. В числителях и знаменателях стоят произведения или только четных чисел или только нечетных. Кроме того,

заслуживает внимания следующее обстоятельство: в правой части равенства (3) мы имеем рациональное число, в правой же части равенства (2) присутствует несоизмеримое число $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, значение интеграла

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

равно рациональному числу в случае n нечетного и несоизмеримому числу в случае n четного.

Отсюда следует, что, чтобы знать величину интеграла u_n при n четном, необходимо предварительно знать значение π.

Весьма любопытно то, что равенствами (2) и (3) можно воспользоваться для вычисления π.

Если x изменяется только в границах от нуля до $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ положителен и меньше единицы. Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x\, dx,$$

потому что подъинтегральные функции удовлетворяют этим неравенствам. При наших обозначениях

$$u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}. \qquad (4)$$

Заменим в этих неравенствах интегралы их значениями из равенств (2) и (3), которые нам дают значения для u_{2m} и u_{2m-1}. Чтобы получить значение для u_{2m+1}, очевидно, достаточно в равенстве (3) заменить m через $m+1$. Делая все это, получаем неравенства:

$$\frac{2\cdot 4\ldots(2m-2)(2m)}{3\cdot 5\ldots(2m-1)(2m+1)} < \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2m-3)(2m-1)}{2\cdot 4\ldots(2m-2)(2m)} < \frac{2\cdot 4\ldots(2m-4)(2m-2)}{3\cdot 5\ldots(2m-3)(2m-1)}.$$

Деля на левую часть, имеем:

$$1 < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\ \ldots(2m-1)(2m-1)(2m+1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots(2m-2)(2m-2)(2m)(2m)} < 1+\frac{1}{2m}.$$

Ясно, что можно написать следующее равенство:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\ldots(2m-1)(2m-1)(2m+1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\ldots(2m-2)(2m)(2m)} = 1+\frac{\theta_m}{2m}, \qquad (5)$$

где θ_m — неизвестная положительная величина, меньшая единицы. Значение ее, очевидно, зависит от того, каково m, которое может быть каким угодно целым числом.

Из (5) мы получаем замечательную формулу:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots(2m-2)(2m-2)(2m)(2m)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots(2m-3)(2m-1)(2m-1)(2m+1)}\left(1+\frac{\theta_m}{2m+1}\right). \qquad (6)$$

Эта формула дает возможность вычислить π. В самом деле, приняв, что

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\ldots(2m-2)(2m)(2m)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)(2m-1)(2m+1)},$$

мы сделаем ошибку, которая меньше $\frac{1}{2m}$ того значения, которое получится для $\frac{\pi}{2}$ *).

Разделим равенство (6) на последний множитель правой части и затем перепишем его в такой форме:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\theta_m}{2m}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}.$$

Это равенство справедливо при всяком m. Если же мы будем увеличивать m, то будет увеличиваться число множителей в правой части.

Вообразим, что m возрастает до бесконечности. Тогда в пределе правая часть обратится в произведение бесконечного числа множителей, и мы получаем следующее чрезвычайно красивое равенство:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Это равенство называется формулой Валлиса. Она дает выражение для $\frac{\pi}{2}$ через бесконечное произведение.

§ 201. Интеграл типа $\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x(x-z)^{n-1}f(z)\,dz$.

Если мы от непрерывной функции $f(x)$ возьмем интеграл от a до x, где a — некоторая постоянная величина, то получим функцию

$$\psi(x)=\int\limits_a^x f(x)\,dx,$$

производная которой равна подъинтегральной функции и которая обращается в нуль при $x=a$:

$$\psi'(x)=f(x),\quad \psi(a)=0.$$

*) Чтобы ясно это видеть, достаточно переписать равенство (6) в такой форме:

$$\frac{\pi}{2}=p_m\left(1+\frac{\theta_m}{2m}\right)=p_m+p_m\frac{\theta_m}{2m}.$$

Так как $\theta_m<1$, то, принимая, что $\frac{\pi}{2}=p_m$, мы делаем ошибку, которая меньше, чем $\frac{p_m}{2m}$.

Но получив функцию $\varphi(x)$, мы можем ее в свою очередь проинтегрировать в пределах от a до x. Получим функцию, которая обозначится так:

$$\int_a^x \left\{ \int_a^x f(x)\,dx \right\} dx.$$

От этой функции мы можем снова взять интеграл в пределах от a до x. Получим функцию

$$\int_a^x \left\{ \int_a^x \left[\int_a^x f(x)\,dx \right] dx \right\} dx,$$

которую в свою очередь можем проинтегрировать от a до x.

Вообще если мы данную функцию $f(x)$ последовательно проинтегрируем n раз, каждый раз в пределах от a до x, то мы получим функцию

$$u = \int_a^x \left[\int_a^x \left\{ \int_a^x \ldots \left(\int_a^x \left(\int_a^x f(x)\,dx \right) dx \right) \ldots \right\} dx \quad dx,$$

где знак интеграла повторяется n раз. Эту функцию принято короче обозначать так:

$$u = \int_a^x \int_a^x \int_a^x \ldots \int_a^x \int_a^x f(x)\,dx^n,$$

или еще короче так:

$$u = \int_a^x f(x)\,dx^n.$$

При этом очевидно, что при каждом новом интегрировании мы будем получать функцию, производная которой равна той функции, от которой берется последний интеграл. Поэтому ясно, что

$$\frac{du}{dx} = \int_a^x f(x)\,dx^{n-1},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \int_a^x f(x)\,dx^{n-2},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \int_a^x f(x)\,dx,$$

$$\frac{d^nu}{dx^n} = f(x).$$

и что сама функция u и все ее производные до $(n-1)$-го порядка равны нулю при $x=a$.

Вообще говоря, в большинстве случаев бывает затруднительно произвести даже одно интегрирование, тем более несколько последовательных интегрирований. Поэтому заслуживает особого внимания тот замечательный факт, что n-кратное интегрирование всегда может быть заменено одним интегрированием. В самом деле, применяя теорему об интегрировании по частям, мы имеем:

$$\int_a^x \underbrace{\left(\int_a^x f(x)\,dx\right)}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \left[x\int_a^x f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=x} - \int_a^x xf(x)\,dx.$$

Проинтегрированная часть при нижней подстановке $x=a$ обращается в нуль, а потому

$$\int_a^x\left(\int_a^x f(x)\,dx\right)dx = x\int_a^x f(x)\,dx - \int_a^x xf(x)\,dx.$$

Заменим теперь в правой части символ x как символ переменной интеграции новым символом z. Получим:

$$\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^2 = x\int_a^x f(z)\,dz - \int_a^x zf(z)\,dz.$$

Теперь мы можем в первом интеграле правой части подвести x как постоянный множитель под символ интеграла. Получим

$$\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^2 = \int_a^x (x-z)f(z)\,dz, \qquad (1)$$

и мы видим, что результат двукратного интегрирования выражается через один определенный интеграл, причем функция $f(x)$ может быть какой угодно непрерывной функцией.

Заменим в равенстве (1) функцию $f(x)$ функцией

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

Тогда получим

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^3 = \int_a^x\left[(x-z)\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)\right]dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^x \underbrace{\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)}_{u} \underbrace{d(x-z)^2}_{dv}$$

и, интегрируя правую часть по частям, имеем:

$$\int_a^x f(x)\,dx^3 = -\frac{1}{2}\left[(x-z)^2\int_a^z f(z)\,dz\right]_{z=a}^{z=x} + \frac{1}{2}\int_a^x (x-z)^2 f(z)\,dz.$$

Проинтегрированная часть обращается в нуль и при верхней и при нижней подстановке, а потому

$$\int_a^x f(x)\,dx^3 = \frac{1}{2!}\int_a^x (x-z)^2 f(z)\,dz. \qquad (2)$$

Заменяя же здесь снова $f(x)$ через функцию

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

получим

$$\int_a^x f(x)\,dx^4 = \frac{1}{2!}\int_a^x (x-z)^2\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{3!}\int_a^x \left(\int_a^z f(z)\,dz\right)d(x-z)^3,$$

что после интегрирования по частям дает:

$$\int_a^x f(x)\,dx^4 = \frac{1}{3!}\int_a^x (x-z)^3 f(z)\,dz. \qquad (3)$$

Равенства (1), (2) и (3) естественно наводят на мысль, что при всяком n

$$\int_a^x f(x)\,dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz. \qquad (4)$$

Чтобы доказать справедливость этого равенства при всяком n, достаточно, учитывая равенства (1), (2) и (3), доказать, что если оно справедливо при каком-нибудь n, то оно справедливо и при следующем за n числом. Для этого переписываем (4) в такой форме:

$$\int_a^x f(x)\,dx^n = -\frac{1}{n!}\int_a^x f(z)\,d(x-z)^n$$

и, заменив $f(x)$ через $\int_a^x f(x)\,dx$, интегрируем правую часть по частям.

Получаем:

$$\int_a^x f(x)\,dx^{n+1} = -\frac{1}{n!}\int_a^x \left(\int_a^z f(z)\,dz\right) d(x-z)^n =$$

$$= -\frac{1}{n!}\left[(x-z)^n \int_a^z f(z)\,dz\right]_{z=a}^{z=x} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz,$$

т. е.

$$\int_a^x f(x)\,dx^{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz.$$

Но это равенство есть не что иное, как равенство (4), в котором n заменено через $n+1$. Следовательно, равенство (4) справедливо при всяком n, и мы получаем теорему:

Последовательное n-кратное интегрирование данной функции от одного и того же нижнего предела может быть заменено одним интегрированием по формуле:

$$\int_a^x \int_a^x \ldots \int_a^x f(x)\,dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Продиференцируем это равенство n раз. Каждое диференцирование уничтожает в левой части один символ интегрирования, а потому в результате мы получим равенство:

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz = f(x).$$

Следовательно, полагая

$$u = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dx, \tag{5}$$

имеем

$$\frac{d^n u}{dx^n} = f(x).$$

Мы видим, что

выражение

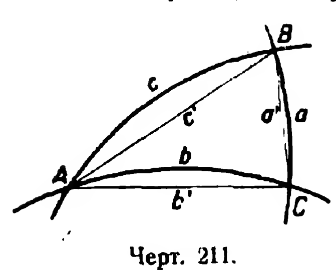
$$u = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f(z)\,dz$$

есть одно из решений уравнения

$$\frac{d^n u}{dx^n} = f(x).$$

§ 202. Бесконечно малый кривой треугольник.

Пусть три кривые, пересекаясь, образуют кривой треугольник ABC. Обозначим через a, b, c дуги, служащие его сторонами, а через α, β, γ противоположные им углы, разумея под углом между двумя кривыми угол между касательными к ним в точке пересечения их (черт. 211). Мы предположим, что этот треугольник бесконечно малый. Говоря точнее, мы предположим, что кривые деформируются по какому-нибудь закону так, что сами дуги бесконечно умаляются, причем кривизна их не может принимать как угодно малых значений. Одним из самых простых, но часто встречающихся примеров такой деформации может служить тот случай, когда все три кривые, не меняя своей формы, движутся по плоскости так, что точки A, B, C бесконечно приближаются к одной и той же точке. В еще более частном случае мы можем себе представить кривые AB и AC неподвижными, а кривую BC движущейся так, что точки B и C бесконечно приближаются к A.



Черт. 211.

С изменением формы треугольника углы α, β, γ тоже изменяются. Обозначим их пределы через $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$:

$$\lim \alpha = \bar{\alpha}, \quad \lim \beta = \bar{\beta}, \quad \lim \gamma = \bar{\gamma}, \tag{1}$$

причем предположим, что ни один из этих пределов не равен нулю, т. е. предположим, что углы α, β, γ не бесконечно малы.

Через a', b', c' обозначим хорды дуг a, b, c; эти хорды образуют обыкновенный прямолинейный треугольник, углы которого обозначим соответственно через α', β', γ'.

Так как по предположению кривизны дуг не бесконечно малы, то дуги эквивалентны своим хордам:

$$a \approx a', \quad b \approx b', \quad c \approx c', \tag{2}$$

и

$$\lim \alpha' = \bar{\alpha}, \quad \lim \beta' = \bar{\beta}, \quad \lim \gamma' = \bar{\gamma}. \tag{3}$$

Мы имеем

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'}.$$

В пределе

$$\lim \frac{a'}{b'} = \frac{\sin \bar{\alpha}}{\sin \bar{\beta}},$$

и так как хорды эквивалентны дугам, то по первому принципу

$$\lim \frac{a}{b} = \frac{\sin \bar{\alpha}}{\sin \bar{\beta}}. \tag{4}$$

Так как правая часть конечна и не равна нулю, то, следовательно, дуги a и b относительно друг друга одного и того же порядка. Также очевидно и дуга c относительно них того же порядка, потому что

$$\lim \frac{c}{a} = \lim \frac{c'}{a'} = \lim \frac{\sin \gamma'}{\sin \alpha'} = \frac{\sin \overline{\gamma}}{\sin \overline{\alpha}}.$$

Из этого, конечно, не следует, что a, b, c будут первого порядка относительно бесконечно-малого, принятого за основное. Пусть это основное бесконечно-малое будет τ и пусть a порядка λ относительно него. Тогда b и c будут относительно τ тоже порядка λ, так как они одного порядка с a. Пусть

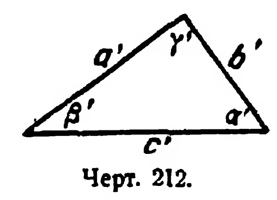
$$a = k\tau^{\lambda} + \varepsilon_1, \quad b = h\tau^{\lambda} + \varepsilon_2, \quad c = g\tau^{\lambda} + \varepsilon_3, \tag{5}$$

где k, h, g — постоянные, не равные нулю, и где ε_1, ε_2, ε_3 — бесконечно малые, порядки которых относительно τ выше λ. Обозначим через $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ главные части дуг a, b, c:

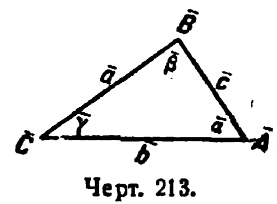
$$\overline{a} = k\tau^{\lambda}, \quad \overline{b} = h\tau^{\lambda}, \quad \overline{c} = g\tau^{\lambda}. \tag{6}$$

Так как бесконечно-малое эквивалентно своей главной части, то

$$a \approx \overline{a}, \quad b \approx \overline{b} \quad c \approx \overline{c}. \tag{7}$$



Черт. 212.



Черт. 213.

После всех этих предварительных замечаний перейдем к доказательству очень важной теоремы.

Рассматривая треугольник из хорд, мы имеем:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'}, \quad \frac{c'}{a'} = \frac{\sin \gamma'}{\sin \alpha'},$$

откуда

$$\lim \frac{b'}{a'} = \frac{\sin \overline{\beta}}{\sin \overline{\alpha}}, \quad \lim \frac{c'}{a'} = \frac{\sin \overline{\gamma}}{\sin \overline{\alpha}}.$$

Но

$$\lim \frac{b'}{a'} = \lim \frac{b}{a} = \lim \frac{\overline{b}}{\overline{a}} = \frac{h}{k}, \quad \lim \frac{c'}{a'} = \lim \frac{c}{a} = \lim \frac{\overline{c}}{\overline{a}} = \frac{g}{k},$$

а потому

$$\frac{h}{k} = \frac{\sin \overline{\beta}}{\sin \overline{\alpha}}, \quad \frac{g}{k} = \frac{\sin \overline{\gamma}}{\sin \overline{\alpha}},$$

или

$$\frac{k}{\sin \overline{\alpha}} = \frac{h}{\sin \overline{\beta}} = \frac{g}{\sin \overline{\gamma}}.$$

Но если имеют место эти равенства, то до перехода к пределу мы, помножая (8) на τ^{λ}, имеем право написать равенства

$$\frac{k\tau^{\lambda}}{\sin\bar{\alpha}}=\frac{h\tau^{\lambda}}{\sin\bar{\beta}}=\frac{g\tau^{\lambda}}{\sin\bar{\gamma}},$$

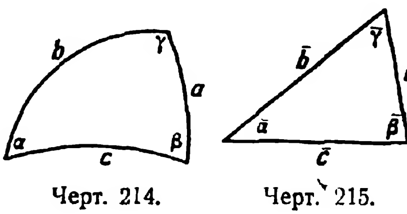
т. е. равенства

$$\frac{\bar{a}}{\sin\bar{\alpha}}=\frac{\bar{b}}{\sin\bar{\beta}}=\frac{\bar{c}}{\sin\bar{\gamma}}. \qquad (9)$$

В этих равенствах и содержится теорема.

Построим прямолинейный треугольник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, сторона $\bar{A}\bar{B}$ которого равна $\bar{c}$, а прилежащие углы равны $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$. Из (9) следует, что две другие его стороны равны $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а угол между ними равен $\bar{\gamma}$ (черт. 215).

Теорема. **Если углы и кривизна дуг бесконечно малого кривого треугольника не бесконечно малы, то прямолинейный треугольник, сторонами которого служат главные части сторон кривого треугольника, имеет углы, равные предельным значениям углов данного треугольника.**



Черт. 214. Черт. 215.

В целях приложения эту теорему выгодно формулировать так:

Всякий бесконечно малый кривой треугольник, углы и кривизна сторон которого не бесконечно малы, можно рассматривать как прямолинейный треугольник при условии замены его сторон главными их частями, а его углов — их предельными значениями.

Ясно огромное значение этой теоремы. Связь между a, b, c может быть очень сложна и в большинстве случаев она с трудом поддается вычислению. В то же время связь между главными частями их $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ как сторонами прямолинейного треугольника легко поддается вычислению. Фактически же нам почти всегда достаточно знать только $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, а не сами a, b, c, которые как бесконечно-малые являются только вспомогательными величинами и могут заменяться эквивалентными им величинами.

В большинстве случаев бесконечно малые являются как приращения переменных величин. В частном случае стороны кривого треугольника мы всегда можем рассматривать как приращения соответствующих дуг. Действительно, выбрав на каждой кривой какую-нибудь точку за начало отсчета дуг и обозначив через s, σ, τ переменные дуги кривых, мы будем иметь

$$a=\Delta s, \quad b=\Delta\sigma, \quad c=\Delta\tau.$$

Черт. 216.

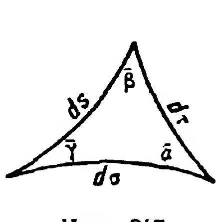
Переменные s, σ, τ могут быть функциями некоторого независимого переменного t; приращения Δs, $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$ мы получаем, давая этому t приращение Δt. Когда Δt бесконечно умаляется, то приращения Δs, $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$

тоже умаляются. Но главная часть приращения функции равна ее диференциалу, а потому согласно теореме стоит только стороны треугольника вместо Δs, $\Delta \sigma$, $\Delta \tau$ считать равными ds, $d\sigma$, $d\tau$, а углы равными их предельным значениям, и мы вправе наш кривой треугольник рассматривать как прямолинейный. Следовательно,

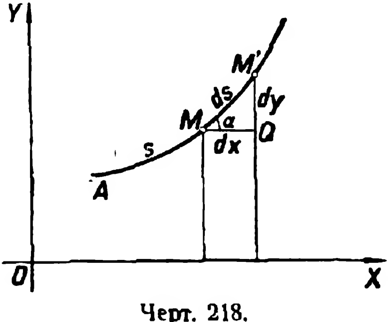
если сторонами бесконечно малого кривого треугольника служат приращения дуг, то его можно рассматривать как прямолинейный при условии считать стороны равными диференциалам, а углы — их предельным значениям.

Поэтому на практике, когда имеют кривой треугольник, то на дугах его пишут их диференциалы, принимая углы равными предельным значениям, и рассматривают его как прямолинейный.

Не надо забывать, что кривой бесконечно малый треугольник можно рассматривать как прямолинейный только в том случае, когда его углы и кривизна его сторон не бесконечно малы.



Черт. 217.



Черт. 218.

Если это забыть, то легко притти к парадоксальным выводам.

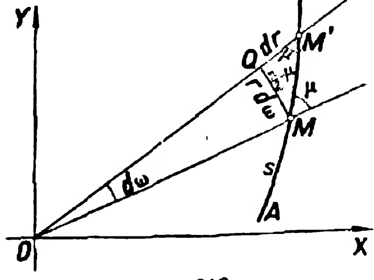
Рассмотрим несколько примеров на изложенное. Пусть M — точка на кривой, данной параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Требуется определить угол α направления касательной. Рассуждаем так: даем параметру бесконечно малое приращение.

Получим точку M', бесконечно близкую к M. Строим ординату точки M' и проводим прямую MQ параллельно оси X. Получаем бесконечно малый кривой треугольник $M'MQ$. Его мы можем рассматривать как прямолинейный при условии считать стороны его равными не приращениям Δs, Δx, Δy, а диференциалам ds, dx, dy, а угол при M равным α. Немедленно же получаем хорошо нам известные соотношения:

$$dx = ds \cdot \cos \alpha,$$
$$dy = ds \cdot \sin \alpha,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$



Черт. 219.

Но заметим, что этот вывод возможен только после того, как предварительно установлено понятие о длине дуги кривой и доказана эквивалентность ее хорде.

Рассмотрим другой пример. Пусть (черт. 219) *требуется определить угол μ между касательной в точке M и ее радиус-вектором для кривой*, данной в полярных координатах уравнениями

$$r = f(t), \quad \omega = \psi(t).$$

Даем параметру бесконечно малое приращение Δt. Угол MQM' равен $\Delta\omega$, но мы пишем, что он равен $d\omega$. Проводим дугу круга MQ. Имеем

$$MQ = r\Delta\omega, \quad QM' = \Delta r, \quad MM' = \Delta s.$$

Рассматриваем кривой треугольник MQM' как прямоугольный, принимая стороны его равными $rd\omega$, dr, ds, а угол при M равным $\frac{\pi}{2} - \mu$. Немедленно же получаем:

$$rd\omega = ds \cdot \sin\mu, \quad dr = ds \cdot \cos\mu, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2,$$

откуда

$$\cos\mu = \frac{dr}{ds}, \quad \sin\mu = \frac{rd\omega}{ds}, \quad \operatorname{ctg}\mu = \frac{d\ln r}{d\omega}, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2.$$

Это вполне строгий вывод. Между прочим, им удобно пользоваться, чтобы быстро вывести эти формулы, если изменит память.